

Grundlagen der Bildverarbeitung

Sommersemester 2022



Grundlagen der
Bildverarbeitung

Mathematische Bildanalyse

Darstellung von Bildern als
mathematische Modelle, Histogramme
und Bildstatistik

Wolfgang Heiden © 2014-22, mit Beiträgen von R. Herpers, F. Mannuß, B. Kahl, G. Heisenberg

Wolfgang Heiden © 2014-22 wolfgang.heiden@h-brs.de
-- auf der Grundlage einer Lehrveranstaltung von Prof. Dr. Rainer Herpers sowie Folien
von Florian Mannuß 2011, Dr. Björn Kahl 2012 --

Fachbereich Informatik (Dpt. Computer Science)
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg – University of Applied Sciences,
53754 Sankt Augustin
Germany

Bilder als Funktion zweier reeller Variablen

- **Annahme:**
 - integrierbar
 - Fourier-transformierbar
 - $x, y \geq 0$
- **$I(x, y)$:= Funktion der beiden reellen (Orts-) Variablen x und y ,**
wobei gilt:
 - $0 \leq x \leq L - 1$ mit $L \in \mathbb{R}$
 - $0 \leq y \leq R - 1$ mit $R \in \mathbb{R}$ und
 - $g_{\min} \leq i(x, y) \leq g_{\max}$ mit $g_i := \text{Grauwerte}$

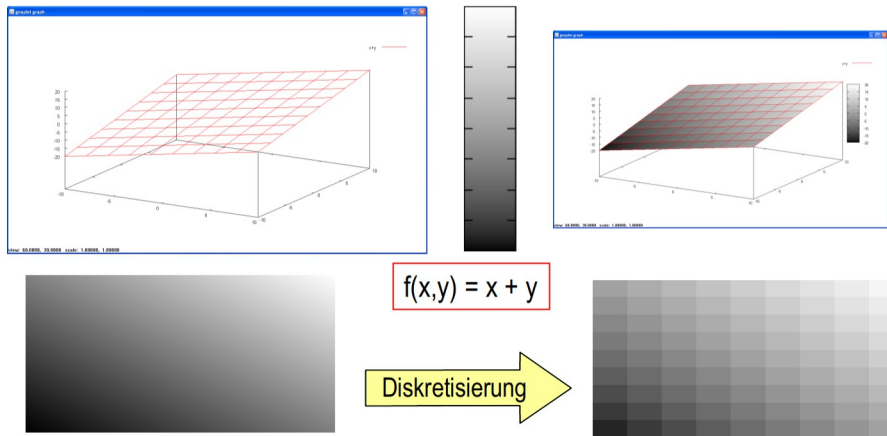
Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07

I = Intensität

L = Länge einer Zeile (analog) in der gewählten Einheit

R = Länge einer Spalte (analog) in der gewählten Einheit

Beispiel:
Bild als Funktion zweier Variablen



Die Diskretisierung (durch Abtastung und Quantisierung) einer kontinuierlichen 2D-Intensitätsfunktion führt zu einem gerasterten (digitalen) Bild mit „Pixeln“, die jeweils eine bestimmte relative Position im Bild haben (ganzzahlige Indizes horizontal und vertikal) sowie eine bestimmte (einheitliche, rechteckige aber nicht notwendigerweise quadratische) Flächenausdehnung und einen für jeweils diese Fläche repräsentativen Intensitätswert (was i.d.R. der „Helligkeit“ des jeweiligen Farb- bzw. Grauwertkanals entspricht).

Bilder als Funktion zweier diskreter Variablen

- **Digitalisierung**
 - Rasterung des Ortsbereichs
 - Quantisierung der Grauwerte
- **Grauwerte eines Bildes liegen nur an bestimmten diskreten Stellen (x, y) vor.**
- **$I(x, y)$:= Funktion der beiden diskreten (Orts-)Variablen x und y , wobei gilt:**
 - $0 \leq x \leq L - 1$ mit $L \in \mathbb{N}$
 - $0 \leq y \leq R - 1$ mit $R \in \mathbb{N}$ und
 - $g_{\min} \leq i(x, y) \leq g_{\max}$
- **Bei Quantisierung der Grauwerte g gilt:**

$$i(x, y) \in G \text{ mit } G := \{z_1, \dots, z_k\}, k \in \mathbb{N}$$

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07

Die mathematische Beschreibung der Diskretisierung von Bildern überträgt die allgemeine, analoge Intensitätsfunktion I der kontinuierlichen Ortskoordinaten (x, y) auf die „Grauwertfunktion“ $i(x, y)$ im Wertebereich G der quantisierten erlaubten Grauwerte (bezogen auf eine einfarbige Intensitätsskala).

Mathematische Beschreibung von Bilddaten

- **Deterministisch:**

- Bilder als ortsabhängige Funktion
- (Pixel-)Intensitäten als diskrete Funktionswerte

- **Statistisch:**

- Interpretation der Grauwerte $i(x, y)$
als Realisation einer Zufallsvariablen Z
 - (→ i.d.R. Vernachlässigung der Anordnung im kartesischen Koordinatensystem)

Eine mathematische Beschreibung kann entweder deterministisch über eine Ortsfunktion erfolgen oder statistisch durch Betrachtung regionaler oder globaler Bildeigenschaften in der Gesamtheit.

Statistische Betrachtung von (diskreten) Grauwertbildern

Mathematisches Modell eines Grauwertbildes

$$G = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$$

$$S = (s(x, y))$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, R-1$$

$$(x, y)$$

$$s(x, y) = g \in G$$

- Grauwertmenge (8 bit)
- Bildmatrix des Grauwertbildes
- L Bildzeilen (**L**ines)
- R Bildspalten (**R**ows)
- Ortskoordinaten eines Bildpunktes
- Grauwert des Bildpunktes

Quelle: med. BV Heisenberg, 2013, mod.

Intensitätsstatistik in Grauwertbildern

- **Mittlerer Grauwert**

→ durchschnittliche Helligkeit

$$m_s = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{L-1} \sum_{y=0}^{R-1} s(x, y) \quad \text{mit } M = L \cdot R$$

- L Bildzeilen
- R Bildspalten

- **Quadratische Abweichung**

→ Bilddynamik

$$q_s = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{L-1} \sum_{y=0}^{R-1} (s(x, y) - m_s)^2$$

Quelle: med. BV Heisenberg, 2013, mod.

M = Anzahl der Bildpunkte

L = Anzahl der Bildzeilen

R = Anzahl der Bildspalten

(x,y) = Position eines Pixels

s(x,y) = Grauwert eines Pixels an Position (x,y)

Bilder als überlagerte Schwingungen

Bilder können auch aufgefasst werden als:

- **Linearkombination** einfacher,
2-dimensionaler Basisfunktionen (in x und y)
 - (z.B. trigonometrische Funktionen: sin, cos, etc.)
- Bild im mathematischen Modell als
kontinuierliche Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Die Intensitätsverteilung in einem Bild (vereinfachend als Helligkeitsverteilung in einem Grauwertbild zu dargestellt) lässt sich verstehen als eine 2-dimensionale Überlagerung mehrerer periodischer (z.B. sin) Helligkeitsfunktionen, deren Interferenz die Helligkeit an jedem Ort innerhalb des Bildes (d.h. die Helligkeit jedes Pixels) erzeugt.

(vgl. Fourier et al.)

Transformation zwischen Datenräumen

- **Information aus einer Domäne wird in einer anderen ausgedrückt.**
- **Beispiel:**
 - AV-Signale als kontinuierliche Funktion der **Zeit** oder des **Ortes** werden als Spektrum von **Frequenzen** dargestellt.
 - Wiederkehrende Signalfolgen führen zu diskreten Spektren.
 - / Bsp.: Das Frequenzspektrum eines Klavierkonzerts reproduziert die gespielten Noten – aber nicht deren Reihenfolge.
 - Je geringer die Zahl verschiedener Frequenzen, desto größer die Möglichkeit zur Kompression.

s.o.: Forderung der Integrierbarkeit und Fourier-Transformierbarkeit (bzw. erstere als Voraussetzung für letztere)

Transformationen vom Zeit- in den Frequenzraum

Laplace-Transformation für $f(t)$

Quelle: <http://www.sosmath.com/diffeq/laplace/basic/basic.html>

Fourier-Transformation für $f(t)$

Quelle: <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/analysis/dft/>

1D Diskrete Cosinus-Transformation für $f(t)$

$$F(u) = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} A(i) \cdot \cos \left[\frac{\pi \cdot u}{2 \cdot N} (2i + 1) \right] f(i)$$

Quelle: <http://www.cs.cf.ac.uk/Dave/Multimedia/node231.html>

2D DCT (NxM) für $f(t)$ {Bilder}

Quelle: <http://www.cs.cf.ac.uk/Dave/Multimedia/node231.html>

$$F(u, v) = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} A(i) \cdot A(j) \cdot \cos \left[\frac{\pi \cdot u}{2 \cdot N} (2i + 1) \right] \cos \left[\frac{\pi \cdot v}{2 \cdot M} (2j + 1) \right] f(i, j)$$

DFT (Diskrete Fourier-Transformation)

- diskrete Frequenzen
- komplexe Zahlen

FFT (Fast Fourier Transform)

- beschleunigter FT-Algorithmus
- Cooley & Tukey, 1965
- Voraussetzung: Anzahl der Einzelwerte ist ein Vielfaches von 2

Fourier-Transformation



- **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768 – 1830)
- französischer Mathematiker und Physiker
- **Fourier-Transformation**
 - eine **Integraltransformation**, die einer Funktion $f(t)$ ihre Fourier-Transformierte (Spektralfunktion, Frequenzspektrum) $F(\omega)$ in Form des Fourier-Integrals zuordnet.

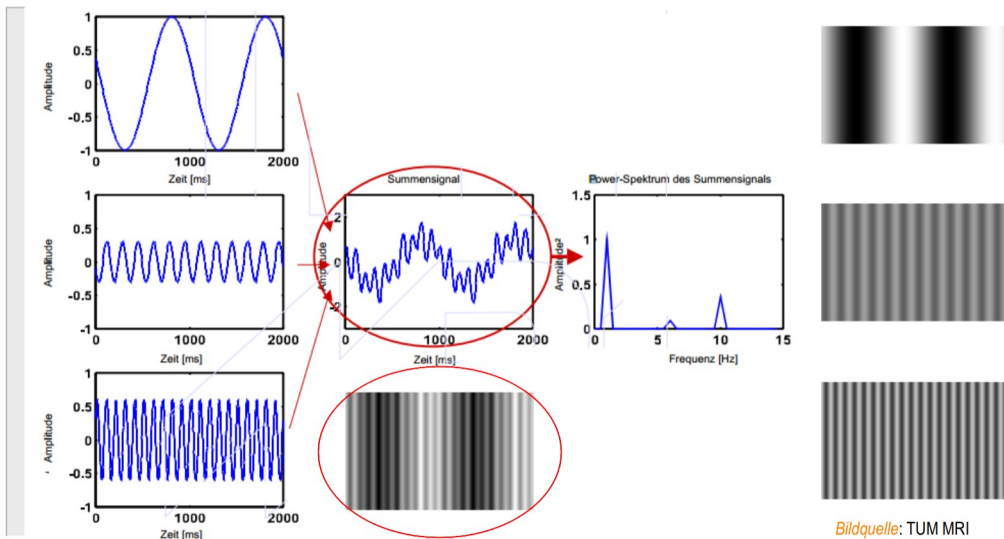
[<https://www.spektrum.de/lexikon/physik/fourier-transformation/5243> (1998), Zugriff 12.04.2019]

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

- **Anwendung:**
 - **Fourier-Analyse**
 - **Zerlegung eines** (ggf.) aperiodischen **Signals in**, einander überlagernde (interferierende), **periodische Komponenten** (sin, cos)
 - **Fourier-Synthese**
 - Rücktransformation

Fouriertransformation

(Komposition)

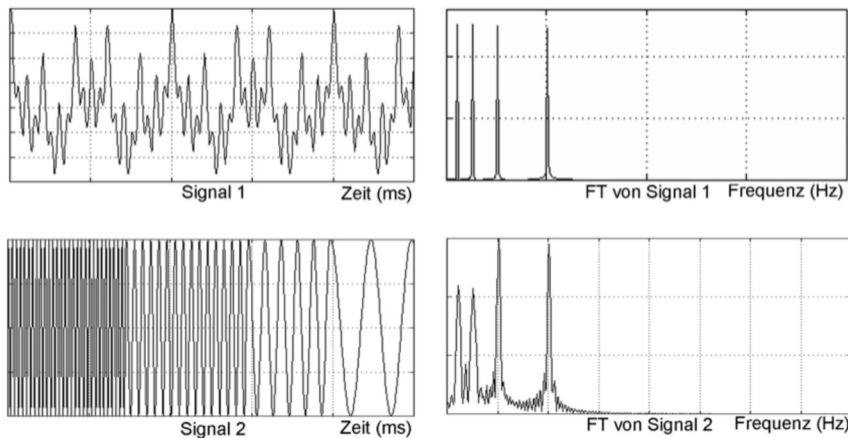


Die Fouriertransformation beschreibt die Komposition (Synthese) bzw. die Dekomposition (Analyse) einer periodischen Funktion durch Überlagerung mehrerer periodischer Teilfunktionen, die sich in Frequenz und Amplitude unterscheiden.

[Graustufen-Darstellung der Sinuskurven berechnet mit Python (matplotlib, numpy, pillow), wh 2021]

Fouriertransformation

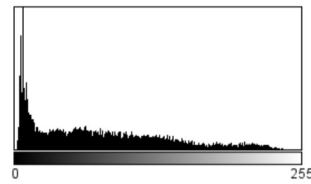
(Beispiele)



- Die Abbildung oben links zeigt die Überlagerung von vier Sinusschwingungen identischer Amplitude, aber unterschiedlicher Frequenz über den gesamten betrachteten Ortsraum.
- Die Abbildung darunter zeigt dieselben Sinusfunktionen. Allerdings überlagern sie einander nicht, da an jeder Position nur eine davon gilt. An definierten Positionen ändert sich die Frequenz des Signals zu einer höheren Frequenz.
- Jeweils rechts daneben ist das zugehörige Frequenzspektrum (FT-Diagramm) abgebildet, wie es aus der Fourier-Transformation hervorgeht.
- Das untere FT-Diagramm zeigt sich deutlich stärker verrauscht als das obere, weil Frequenzen nicht punktweise festgestellt werden, sondern immer nur über einen bestimmten Abschnitt hinweg ermittelt werden können. Um die Positionen des Frequenzwechsels herum ergeben sich daher im unteren Fall Mischfrequenzen, welche die scharfen Frequenzpeaks gegenüber dem oberen Beispiel verfälschen.

Histogramm

- **Relative Häufigkeiten von Grauwerten $h_I(g)$**
bzw. Grauwertintervallen
- Funktion $h : g \rightarrow \mathbb{N}$,
 - Indizierung der Histogrammzellen und ...
 - Berechnung der relativen Häufigkeiten
von Intensitätswerten



Count: 16000 Min: 0
Mean: 75.728 Max: 252
StdDev: 61.529 Mode: 7 (656)

h = Histogrammfunktion

g = Grauwerte

→ Abbildung auf natürliche Zahlen (diskret, positiv)

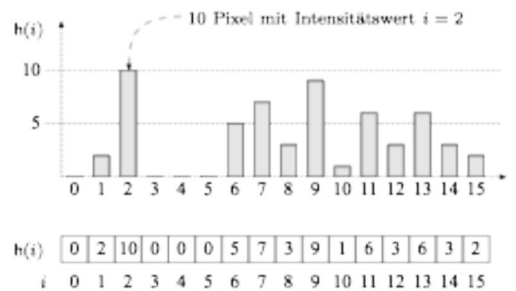
Grauwerte als diskretisierte Grauwertintervalle (bzgl. Kontinuierlicher Intensitätsfunktion)

Histogramm formal

Für ein Bild $I(u, v) \in [0, K - 1]$ mit K Intensitätswerten gilt:

$h(i)$ = Anzahl Pixel von I mit Intensitätswert i , $0 \leq i < K$

oder formal $h(i) = |\{(u, v) | I(u, v) = i\}|$



Bildquelle: Burger

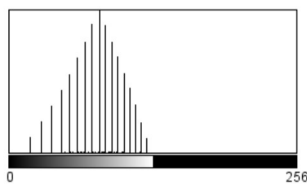
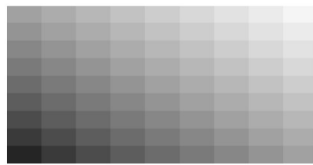
Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

K = Anzahl der Intensitätswerte

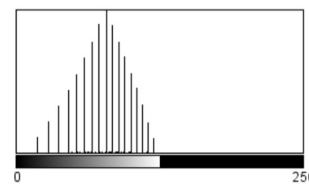
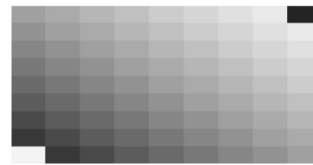
Histogramm: Beispiel

Verständnisfrage:

Kann man aus einem Bildhistogramm ein Bild rekonstruieren?



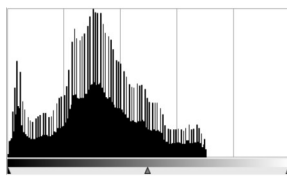
=



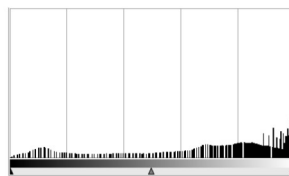
Da Histogramme nur Häufigkeiten zählen, erzeugen zwei diskrete Bilder, bei denen nur einzelne Pixelpositionen vertauscht sind, identische Histogramme.

Interpretation von Histogrammen: Belichtungsfehler

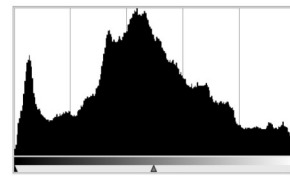
Unterbelichtung



Überbelichtung



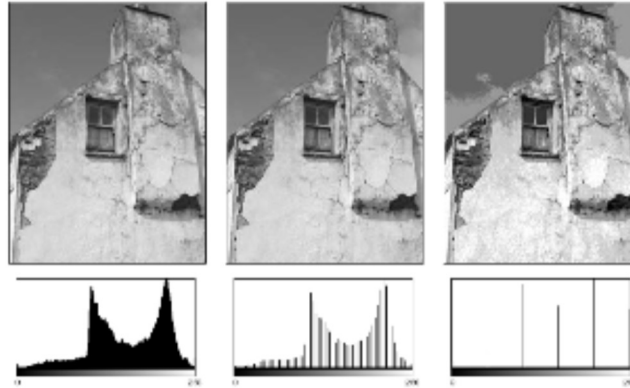
korrekt



Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

Interpretation von Histogrammen: Dynamik

- Anzahl genutzter Intensitätswerte in einem Bild
- Dynamik kann nicht vergrößert werden.

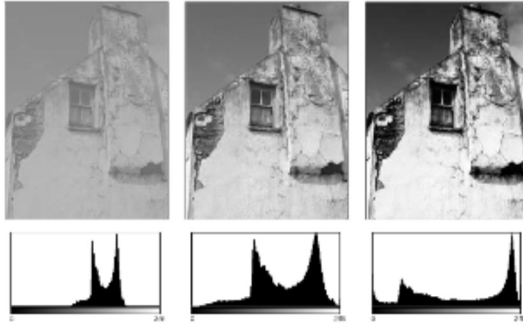


Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

Interpretation von Histogrammen: Kontrast

Genutzter Wertebereich $i \in [a_{low}, a_{high}]$

- als Maß für Kontrast
- ideal: $i \in [0, K - 1]$
- Kontrast kann modifiziert werden.

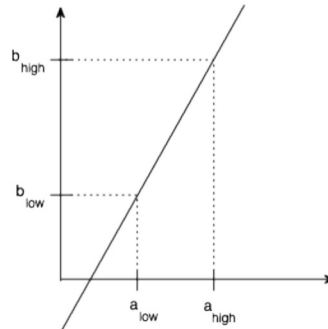


Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

Histogramm-Operationen: (Kontrast-)Spreizung

Abbildung des Grauwertbereichs des Bildes $[a_{low}, a_{high}]$

- auf einen beliebigen Bereich $[b_{low}, b_{high}]$
- z.B. $[0, K - 1]$



$$i_{new} = b_{low} + \frac{(b_{high} - b_{low})}{(a_{high} - a_{low})} \cdot (i - a_{low}); \quad a_{low} \leq i \leq a_{high}$$

Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

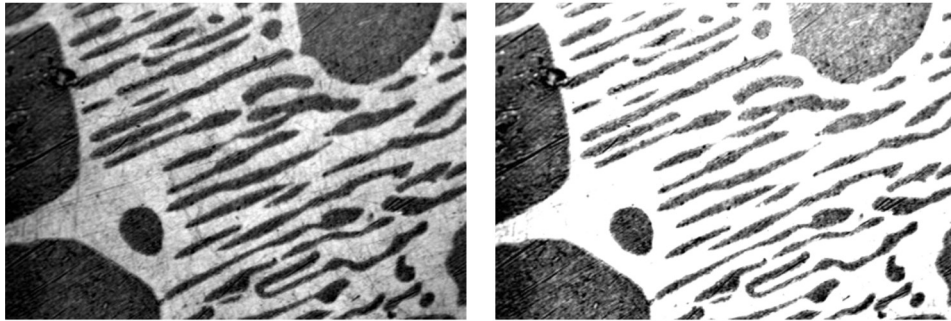
a: alte Grauwerte
b: neue Grauwerte

Über-Spreizung durch Falschfarben möglich!

Automatische Kontrastanpassung

Spreizen des Grauwertbereichs des Bildes auf [0, 255]

$$f(g) = (g - g_{low}) \frac{255}{(g_{high} - g_{low})}$$

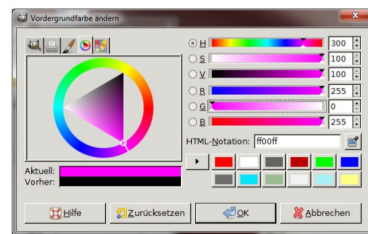
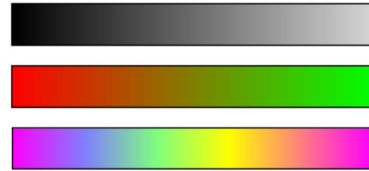


g_{high}, g_{low}

= maximaler und minimaler Grauwert des betrachteten Bildes

Falschfarben

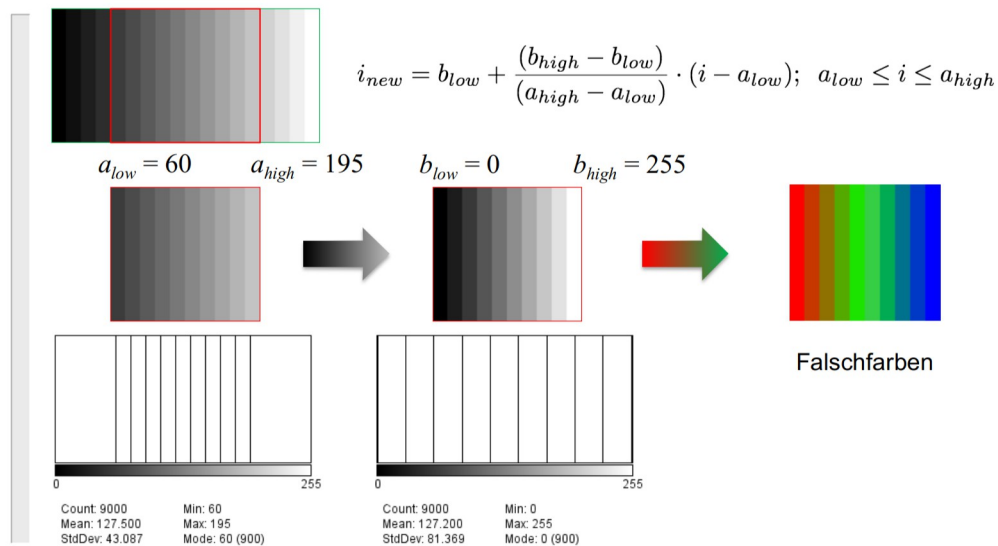
- **Über-Spreizung**
- **8bit-Graustufen**
 - 256 verschiedene Grauwerte
 - mehr als wahrnehmbar
- **24bit-Farbstufen**
 - ca. 16 Mio. Abstufungen
 - auch mehr als wahrnehmbar, aber bessere Unterscheidbarkeit als Graustufen → höhere Auflösung
 - *Achtung:* Helligkeitsunterschiede
 - *Achtung:* Ambivalenz bei Schließen des Farbkreises



→ Übungsaufgabe dazu!

Abb: Farbwahl-Dialog GIMP 2.8.10

Grauwert-Spreizung



Grauwerte 0 – 255 in 18 Stufen ($\Delta=15$)
davon beidseitig Werte abgeschnitten à 10 Stufen
gespreizt wieder auf 0 – 255

(Falschfarbenbild leicht getrickst: Gegenüber der automatischen Berechnung mit Plugin sind die beiden mittleren Grüntöne leicht modifiziert, weil sie sonst nicht zu unterscheiden wären. Grün dominiert in beiden Fällen stark gegen einen marginalen Rot- bzw. Blau-Wert.)

Histogramm-Operationen: Erwartungswert/**Schwerpunkt**

- Engl.: mean intensity / average intensity
- **Schwerpunkt** = Erwartungswert =
- der aus Häufigkeit und Intensität gemittelte Intensitätswert des Bildes =
 - der statistisch zu erwartende Intensitätswert an einer beliebigen Position
- Maß für die Gesamthelligkeit eines Bildes bzw. Bildbereichs
- Ermittlung des Schwerpunkts eines Histogramms

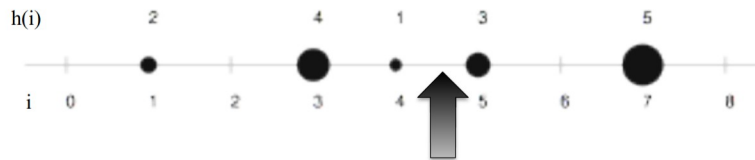
$$i_s = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K-1} h(i)} \sum_{i=0}^{K-1} h(i)i$$

- Anzahl der Pixel im Bild mit (U,V) = (Breite,Höhe):

- ~~Anwendung~~ $\sum_{i=0}^{K-1}$ z.B. Segmentierung, Quantisierung

Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

Histogramm-Operationen: Schwerpunkt (Beispiel)



$$\begin{aligned}i_s &= \frac{1}{\sum_{i=1}^5 h(i)} \sum_{i=1}^5 h(i)i \\&= \frac{1}{15} (2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7) \\&= 4,53 \approx 5\end{aligned}$$

Quelle: Ehrhardt: Einführung in die Digitale Bildverarbeitung

$h(i)$ = Häufigkeit der Intensität i (entspricht einem best. Grauwert)

Histogramm-Operationen: Varianz & Standardabweichung

- **Varianz** (*variance*)
= mittlere quadratische Abweichung
- Maß für Schwankung der Intensitätswerte um den Intensitäts-Schwerpunkt
- **Standardabweichung** (*standard deviation*)
= Wurzel aus Varianz
- Betrag statistisch signifikanter Schwankung in beide Richtungen

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K-1} h(i)} \sum_{i=0}^{K-1} (i - i_s)^2 h(i)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

Quelle: GBV Mannuß/Kahl, 2006/12, mod.

StdAbw = Standardabweichung (Engl.:
standard deviation)

Entropie

- Maß für den mittleren **Informationsgehalt (I)** eines digitalisierten Bildes (wichtig bei der Bildkompression und Datenreduktion)

$$I(g) = -\log_2(p(g)) \text{ [bit]}$$

$p(g)$ = Wahrscheinlichkeit
(rel. Häufigkeit)
eines diskreten
Grauwertes g
(vgl. Histogramm)

- **Entropie (H)** als Maß für die mittlere *a priori* Unsicherheit pro Bildpunkt

$$H = - \sum_{\text{pixel}} p(g) * I(g)$$

Gemittelte Anzahl der notwendigen **Bits pro Bildpunkt**

in [bit/Grauwert]

- d.h. ein Bild mit Entropie H kann ohne Informationsverlust nicht mit weniger als H bit pro Bildpunkt kodiert werden.

$$H = - \sum_{g=0}^{255} (p_s(g) \cdot \log_2 p_s(g))$$

In der Informationstheorie spricht man bei Information ebenso von einem Maß für *beseitigte Unsicherheit*. Je mehr Zeichen im Allgemeinen von einer Quelle empfangen werden, desto mehr Information erhält man und gleichzeitig sinkt die Unsicherheit über das, was hätte gesendet werden können.

wichtig für Kompressionsverfahren (z.B. Huffman vs. Arithmetische Codierung)

Entropie und Anisotropie-Koeffizient

- Informationsgehalt eines digitalisierten Bildes

$$I = -\log_2 p_s(g)$$

$p_s(g)$ ist die Wahrscheinlichkeit
(rel. Häufigkeit) des Grauwertes g
(vgl. Histogramm)

- Entropie

$$H = -\sum_{g=0}^{255} (p_s(g) \cdot \log_2 p_s(g))$$

- Anisotropiekoeffizient α

$$\alpha = \frac{-\sum_{g=0}^k (p_s(g) \cdot \log_2 p_s(g))}{H}$$

k ist der kleinstmögliche Grauwert, für den gilt:

$$\sum_{g=0}^k p_s(g) \geq 0.5$$

Symmetrische Histogramme $\rightarrow \alpha = 0.5$.
Abweichung \rightarrow zunehmende Asymmetrie.

nach G. Heisenberg, SS'13

In der Informationstheorie spricht man bei Information ebenso von einem Maß für *beseitigte Unsicherheit*. Je mehr Zeichen im Allgemeinen von einer Quelle empfangen werden, desto mehr Information erhält man und gleichzeitig sinkt die Unsicherheit über das, was hätte gesendet werden können.

Kompetenzcheck

- **Bilder als 2D-Funktion**
 - reell (kontinuierlich) vs. diskret
- **Darstellung in Orts- und Frequenzraum**
 - Fourier-Transformation
- **Bildstatistik**
 - mittl. Intensität, mittl. quad. Abweichung
 - Entropie
- **Histogramme**
 - Auswertung
 - | Belichtung, Dynamik, Kontrast
 - Operationen
 - | Spreizung, Schwerpunkt (vgl. mittl. Intensität)
 - | Varianz (vgl. quad. Abw.), Standardabweichung

