

Filteroperationen im Ortsraum

Bildoperationen im Ortsraum:
spezielle **Faltungsfiler** zur
Rauschunterdrückung
(**Tiefpassfilter** = Glättungsfiler)

Wolfgang Heiden © 2014-22, mit Beiträgen von R. Herpers, F. Mannuß, B. Kahl, G. Heisenberg

Wolfgang Heiden © 2014-22 wolfgang.heiden@h-brs.de

-- auf der Grundlage einer Lehrveranstaltung von Prof. Dr. Rainer Herpers sowie Folien
von Florian Mannuß 2011, Dr. Björn Kahl 2012, Prof. Dr. G. Heisenberg, 2013 --

Fachbereich Informatik (Dpt. Computer Science)

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg – University of Applied Sciences,

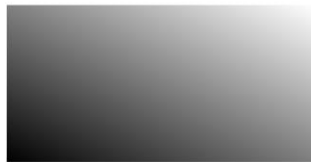
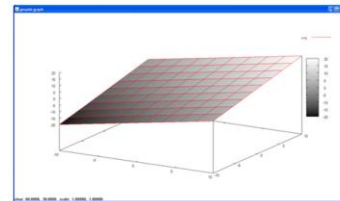
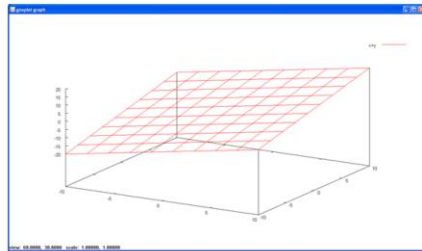
53754 Sankt Augustin

Germany

Wiederholung:
Bild als Funktion zweier Variablen

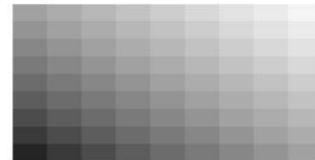
Analoges Bild

Digitales Bild



$$f(x,y) = x + y$$

Diskretisierung



Noch einmal sei hier auf die Unterscheidung zwischen analogen (d.h. kontinuierlichen) und (gerasterten, d.h. diskretisierten) digitalen Bildinformationen hingewiesen.

Wiederholung: Was ist ein Bild?

- **Bild als Funktion f , von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} :**
 - $f(x, y)$ gibt die Intensität bei Position (x, y) an.
 - Praktisch wird ein Bild über ein Rechteck mit begrenztem Wertebereich definiert:
 - $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, 1]$
- **Farbbild = 3 solche Funktionen.
als *vector-valued function*:**

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} r(x, y) \\ g(x, y) \\ b(x, y) \end{bmatrix}$$

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

Zur Erinnerung:

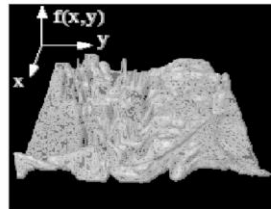
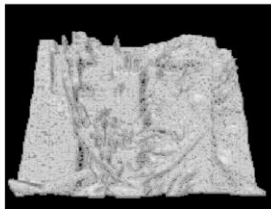
Statt als diskrete Werte im 8 bit-Intervall $[0, \dots, 255]$ können Bildintensitäten ortsabhängig auch stufenlos als Funktionswerte in einem generischen Intervall $[0, \dots, 1]$ (\min, \dots, \max) definiert werden.

vgl. hierzu die Funktion "rectangle" in ImageJ zur Auswahl eines rechteckigen Bildbereichs als Region of Interest (ROI).

Bilder als (Pseudo 3D-)Funktion



● Helligkeit als
z-Koordinate



Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

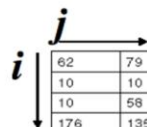
Die ortsbezogenen Intensitätswerte eines Bildes lassen sich auch als eine weitere Koordinate in einem kartesischen 3D-System interpretieren. Damit werden Graustufen zu Höhen eines Reliefs.

Derartigen Umrechnungsmodule finden sich als Funktion in vielen 3D-Modelling-Programmen, z.B. Blender, als Möglichkeit, Terrains aus Graustufenbildern als "Height Maps" zu erzeugen.

Wiederholung: Was ist ein digitales Bild?

- **Digitale Bildverarbeitung nutzt üblicherweise diskrete Bilder:**

- Abtastung (sampling) in regulärem 2D-Gitter
- Quantisierung zu int-Werten (0-255)
- Bild als Matrix von Integer-Werten



62	79	23	119	120	105	4	0
10	10	9	62	12	78	34	0
10	58	197	46	46	0	0	48
176	135	5	188	191	68	0	49
2	1	1	29	26	37	0	77
0	89	144	147	187	102	62	208
255	252	0	166	123	62	0	31
166	63	127	17	1	0	99	30

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

Zur Erinnerung:

noch einmal eine alternative Darstellung eines Bildbereichs über diskrete Intensitätswerte an diskreten Bildpositionen als Ergebnis einer gerasterten Abtastung mit anschließend quantisierter Speicherung der Messwerte mit 8 bit pro Farbkanal bzw. Graustufenwert → 256 versch. Werte

(inhaltliche Wiederholung; dieselbe Folie kam noch nicht vor)

- Eine **Bildverarbeitungsoperation** erzeugt ein neues Bild ***g*** auf der Basis eines bestehenden Bildes ***f***.

- **Transformationen *t* von *f*:**

- **Wertebereich:**

$$g(x, y) = t(f(x, y))$$

- **Definitionsbereich:**

$$g(x, y) = f(t_x(x, y), t_y(x, y))$$

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

Mathematisch betrachtet entspricht eine Bildverarbeitungsoperation der Transformation eines Originalbildes F mit der ortsabhängigen Intensitätsfunktion $f(x,y)$ zu einem Ergebnisbild G mit der Intensitätsfunktion $g(x,y)$ mithilfe der Transformationsfunktion t .

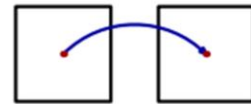
Eine Transformation im **Wertebereich** (Range transformation) verändert die Funktionswerte in Abhängigkeit von deren Position im Originalbild.

Eine Transformation im **Definitionsbereich** (Domain transformation) positioniert die Funktionswerte des Ursprungsbildes in Abhängigkeit von deren ursprünglichen Koordinaten neu, ohne die Intensitäten als solche zu verändern (z.B. Bildspiegelung).

Wiederholung: Transformationen von Bildern

- **Punktoperatoren**

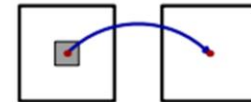
- Unabhängige Betrachtung einzelner Pixel/Punkte



Punktoperator

- **Lokale Operatoren (Maskenoperatoren)**

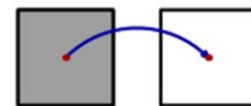
- Betrachtung von Bildbereichen unter einer Maske
- Es werden einzelne Pixel und deren Umgebung transformiert.



Lokaler Operator

- **Globale Operatoren**

- Berücksichtigung des Bildes als Gesamtheit



Globaler Operator

Wiederholung: Punktoperatoren

- **Grauwerttransformation:**

$$g(x, y) = t(f(x, y))$$

mit $t :=$ eine (nichtlineare) Kennlinie bzw. Funktion

- Häufig (u.a. in der Mediz. BV):
Grauwertspreizung
- **Schwellwertverfahren (Thresholding)** führt zu
Binärbildern

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

g (Grauwert) entspricht I (Intensität)

Grauwerttransformation über Punktoperatoren wie zuvor behandelt und hier formuliert betreffen den Wertebereich (nicht den Definitionsbereich).

Kreuzkorrelation

- **Korrelationsfunktion zwischen zwei Bildern**
- Beschreibung einer
Vorschrift, die das eine Bild (F) in das andere (G) umwandelt
- **Umwandlungselement:**
Filter = Filterkern = **Kernel** = **Maske** = Fenster : $H[u,v]$
(bzw. $H[u+k,v+k]$, falls $u \mid v < 0$)
- **statistisches Bildverständnis:**
Statistik 2. Ordnung für zwei Punkte x und x'
- Ein **Filter bestimmter Größe und Form** wandert **punktweise** über ein Bild und wandelt den jeweils **zentral** gelegenen **Bildpunkt** nach einer festen Vorschrift in **Bezug auf** seine **Nachbarschaft** um.

$$G = H \otimes F$$

Die Koordinaten im Filterkern können in Bezug auf den repräsentierten Punkt (i.d.R. im Zentrum des Kernels) positive oder negative Werte annehmen (z.B. in symmetrischen Kernel-Arrays um einen zentralen Punkt); k (Kernel-Radius) als Offset erzeugt dann positive Integer-Werte zur Berechnung der transformierten Werte

G = Ergebnisbild

H = Kernel = Filterkern = Maske

F = Originalbild

Formalisierung der Kreuzkorrelation

- Als **Gleichung** mit dem **mittelnden Fenster** $(2k+1) \times (2k+1)$:

$$G[i, j] = \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{u=-k}^k \sum_{v=-k}^k F[i+u, j+v]$$

- **Generalisierung durch unterschiedliche Gewichtung benachbarter Pixel:**

$$G[i, j] = \sum_{u=-k}^k \sum_{v=-k}^k H[u, v] F[i+u, j+v]$$

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

i,j: Laufvariablen im Bild: Position des aktuellen Kernelzentrums in Bezug auf das Originalbild

u,v: Koordinaten im Filterkern (hier auch „Fenster“ genannt)

k: Kernel-Radius = Anzahl der Pixel in alle Richtungen vom Kernel-Zentrum aus

G: Pixel-Intensitätswert an aktueller Zentralposition des Kernels im Ergebnisbild

F: Pixel-Intensitätswert an aktueller Zentralposition des Kernels im Originalbild

H: Gewichtung der Beiträge im Kernel (H allg. als Matrix ist der Filterkern)

Die **obere Gleichung** berechnet neue Intensitätswerte für die Pixel eines Ergebnisbildes G beim Durchlaufen der Pixel eines Originalbildes mit den Ortskoordinaten i und j. Sie benutzt dazu einen symmetrischen Filterkern mit k Pixeln Größe in jede Koordinatenrichtung um den aktuell betrachteten Pixel an der Position (i,j). Durch **Aufsummieren** sämtlicher Intensitätswerte innerhalb des Filterkerns und anschließender **Normierung** über Teilen der berechneten Summe durch die Anzahl der aufsummierten Pixel wird dabei **der arithmetische Mittelwert** berechnet.

Um die mit dem Filter verbundene Kreuzkorrelationsfunktion zu verallgemeinern (**untere Gleichung**), kann jeder Position (u,v) im Filterkern ein **Gewichtungsfaktor** H(u,v) zugewiesen werden, der beim Aufsummieren mit dem jeweiligen Intensitätswert des darunter liegenden Originalpixels multipliziert wird. Bei beliebigen Werten für H muss zur Normierung das Gesamtergebnis durch die Summe aller Gewichtungsfaktoren geteilt werden. Meist werden diese aber bereits so gewählt, dass ihre Summe den Wert 1 ergibt und somit eine nachträgliche Normierung entfallen kann.

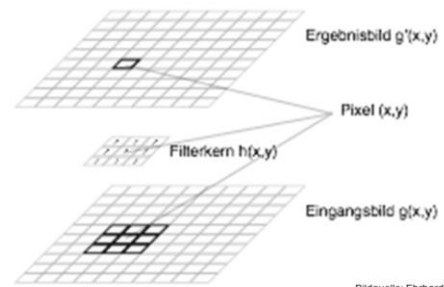
- Berücksichtigung von Pixeln gemeinsam mit deren **Umgebung** im Originalbild I
- Speicherung in separatem **Ergebnisbild** I'
- **Filterkern** $h(i,j)$
- **Linearkombination**

... linearer Filter h_1 und h_2
ergibt linearen Filter h

$$h = \alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

und Filteroperatoren h, h_1, h_2



Bildquelle: Ehrhard

Bei der Bildtransformation mit einem Linearen Filter ist es erforderlich, für das Ergebnisbild eine vollständig eigene Bildmatrix anzulegen. Die Speicherung der neu berechneten Werte muss separat erfolgen, weil beim Weiterrücken des Filters um einen Pixel der Wert an der zuvor betrachteten Position nicht mit dem neu berechneten Wert überschrieben werden darf, um das Ergebnis der Filterung mit seinem Einfluss nicht zu verfälschen.

Mathematisch betrachtet überlagern sich die 1D-Filter h_1 und h_2 über die beiden Koordinatenrichtungen in einer Linearkombination zum linearen 2D-Filter h .

Lineare Filter: Beispiele

- **Bildverbesserung (Glättung)**

- Tiefpassfilter
- Mittelwertfilter
- Gaussfilter
- ...

- **Kantendetektion**

- Hochpassfilter

- **Suche nach bestimmten Bildelementen (Templates)**



Glättungs-Filter



Lineare Bildfilter ermöglichen vielfältige Anwendungen, so z.B. zur Glättung verrauschter Bilder, zur Erkennung von Kanten entlang hoher Intensitätsgradienten oder zur Identifikation von Bildregionen, die einem vorgegebenen Suchmuster ähneln.

Filterkern (1)

- Diskrete zweidimensionale reellwertige Funktion

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

- eigenes Koordinatensystem; Ursprung = „Hot Spot“
- definierte Größe

- i.d.R. symmetrisch, z.B. 3x3, 5x5, 9x9
- mit Filterkoordinaten von $-m$ bis m (z.B. $[-1, 1]$; $[-2, 2]$)

- außerhalb des definierten Bereichs gilt: $h(i, j) = 0$

- Filterkern ist normiert, d.h. $\sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m h(i, j) = 1$

$$h(i, j) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Der **Kern** eines linearen Filters enthält Funktionswerte an diskreten Positionen um seinen Ursprung, den Ort der durchzuführenden Transformation.

Versteht man den Filter als Überdeckung des gesamten zu transformierenden Bildes, so sind diese Werte nur innerhalb des sich iterativ verschiebenden „Kerns“ definiert und liefern überall außerhalb einen Beitrag von „0“.

Filterkern (2)

- Filterkern $h'(i,j)$ oft mit ganzzahligen Werten
- Normierung:

$$s = \frac{1}{\sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m h'(i,j)} \quad h(i,j) = s \cdot h'(i,j)$$

- Funktion ausschließlich über Filterkern beschrieben
 - „unendlich“ viele Möglichkeiten
 - 2 wichtige Gruppen:
 - Glättungsfilter
 - Differenzfilter

$h(i,j)$ gibt i.d.R. Anteile an, deren Summe über alle Kernel-Positionen den Wert 1 ergibt. (Das ist besonders wichtig, wenn nicht alle gleich sind, d.h. wenn Gewichtungen vorgenommen werden.)

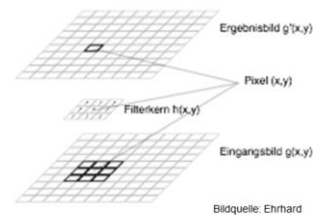
Zur Vereinfachung von Berechnungen werden die Kernel-Komponenten gern in ganzzahligen Werten angegeben; in diesem Fall ist bei der eigentlichen Berechnung der Ergebniswerte ein Normierungsfaktor anzuwenden. (s.o. – auf einer früheren Folie)

● Vorgehen:

- Positioniere Ursprung Filterkern $h(0,0)$ über Pixelposition $I(x,y)$ des Eingangsbildes.
- Multipliziere jedes Bildelement mit dem darüber liegenden Filterkernelement und summiere alle Werte auf.
- Schreibe Ergebnis in $I'(x, y)$

$$I'(u, v) = \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m I(u+i, v+j) \cdot h(i, j)$$

mit $u \in [m, U-m), \quad v \in [m, V-m)$



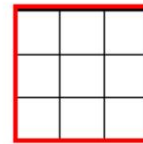
Bei der Anwendung eines Bildfilters wird dieser Pixel für Pixel über das Originalbild verschoben und in jedem Schritt ein neuer Wert für das Ergebnisbild an der betreffenden Position berechnet.

Definition Kernel/Maske

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$F[x,y]$

$H[u,v]$



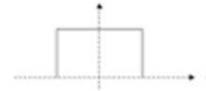
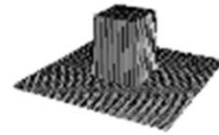
Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07

Im Beispiel liefert der rote Filterkern bei gleicher Gewichtung aller Positionen den Ergebniswert

$$(90 + (8 \times 0)) / 9 = 10$$

Bildfilter – Einfaches Beispiel

- **Boxfilter**
- **einfachster Mittelwertfilter**
 - alle Filterkoeffizienten identisch
 - entweder 0 oder 1
 - scharf abfallende Kante
 - alle Pixelwerte des Eingangsbildes im Filterbereich gleich stark gewichtet
 - beliebig groß
 - *Einsatzgebiet:*
Entfernen von Bildfehlern, Glättung



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Der einfachste Bildfilter mit gleicher Gewichtung aller Komponenten einer 3x3-Matrix berechnet das arithmetische Mittel für den zentralen Pixel in seiner Umgebung unter dem Filterkern.

Da man diesen Filter anschaulich als eine quadratische „Box“ betrachten kann, wird er gelegentlich auch als Boxfilter bezeichnet.

Faltungsfilter

- **Kreuzkorrelation:** $G = H \otimes F$

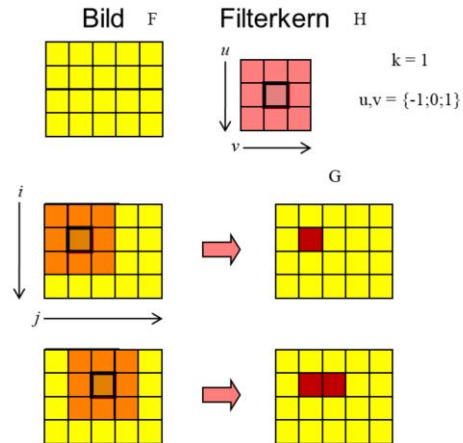
wandernde Matrix-
multiplikation zur
Bildveränderung

- Der **Filterkern (kernel)**
bewegt sich über das
Ausgangsbild und berechnet
an jeder Position einen
Ausgabewert.

- „**Faltung**“ (**convolution**) =
Kreuzkorrelation über lineare
Filter mit horizontal und
vertikal symmetrischem Kern

$$G = H \star F$$

$$G[i, j] = \sum_{u=-k}^k \sum_{v=-k}^k H[u, v] F[i - u, j - v]$$



„Faltung“ (*convolution*) bezeichnet die Multiplikation zweier Matrizen (i.d.R. unterschiedlichen Formats aber gleicher Dimensionalität) zur Erzeugung neuer Matrixwerte durch Linearkombination der alten.

Der (kleinere) Filterkern (*kernel*) bewegt sich über das (größere) Ausgangsbild und berechnet neue Werte an seiner jeweiligen Position.

Grundsätzlich bestehen verschiedene Möglichkeiten für die Schrittweite und die Behandlung der Randbereiche, so z.B. exakte Passform, Pixel-weise vorrücken, Ränder extrapolieren, Ränder abschneiden, ...

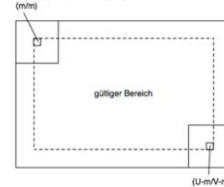
[Quelle: www.dai.ed.ac.uk/HIPR2/convolve.htm]

Faltung als Sonderfall der Kreuzkorrelation verwendet Filterkerne, die in beiden Richtungen symmetrisch sind.

Randproblem bei Bildfiltern

- **Problem:** Überlappung mit nicht definierten Nachbarn
Filterkern an Randbereichen nicht nutzbar

$$u \in [m, U - m), \quad v \in [m, V - m)$$




- **Lösungsmöglichkeiten:**
 - Abschneiden, d.h. Randbereich weglassen
→ problematisch bei großen Filterkernen
 - Übernahme von $I(u, v)$ nach $I'(u, v)$
 - Berechnung am Rand über weniger Pixel (kleinerer Filterkern)
 - Nutzung eines asymmetrischen Filterkerns am Randbereich
 - Spiegelung
 - Ringschluss (Wrap-around)

Am Rand eines Bildes kann es bei der Anwendung rechteckiger Bildfilter zu Problemen kommen, wenn Elemente des Filterkerns außerhalb des Bildes liegen und die „darunter liegenden“ Pixel somit nicht definierte Werte annehmen.

Daher sind in diesen Fällen besondere Regeln für die Anwendung der Filter erforderlich. Für solche Regeln gibt es mehrere Möglichkeiten, zwischen denen unter Berücksichtigung des Bildinhalts bzw. des erwarteten (oder angestrebten) Ergebnisses der Filterung ausgewählt werden kann.

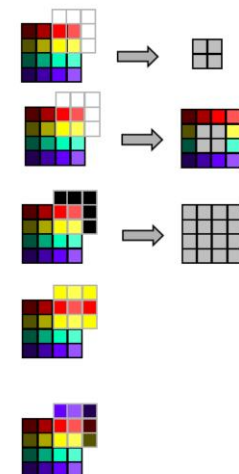
Randbehandlung (Beispiele)



Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg

**Grundlagen der
Bildverarbeitung**

- **Abschneiden**
- **Übernahme**
 - $I'(u,v) = I(u,v)$
- **Asymmetrischer Kernel**
(im Filter außerhalb Nullen)
- **Spiegelung**
- **Wrap-around**
(~Ringschluss)
- ...



Filter-Beispiel:
zentrales Pixel
einheitlich grau färben
(stark vereinfacht –
eigentlich eine
Punktoperation)

SS 2022
Operationen im Ortsraum
25

Ergebnis-Beispiel: Grau färben (zwecks Anschaulichkeit stark vereinfacht, weil eigentlich eine Punktoperation)

Abschneiden = „Randbereich weglassen“: Pixel mit Filterkernelementen außerhalb des Bildes werden gelöscht und damit wird das Bild verkleinert.

Übernahme = „Original übernehmen“: Pixel mit Filterkernelementen außerhalb des Bildes behalten ihren Ursprungswert: $I'(u,v) = I(u,v)$

Asymmetrisch = Nullen auffüllen: Filterelemente außerhalb des Bildes erhalten die Gewichtung 0, d.h. sie tragen nicht zur Transformationsberechnung bei.

Spiegelung: Die Werte unter den Kernelementen werden von innerhalb des Bildes am HotSpot nach außerhalb gespiegelt; damit wird Symmetrie um den zu berechnenden HotSpot postuliert.

Wrap-around = Ringschluss: Die Bildränder werden so behandelt, als ob sie sich am gegenüberliegenden Rand fortsetzen würden (wie bei einer Weltkarte). So wird die Bildfläche endlich, aber unbegrenzt, und kein Kernelement liegt über einem leeren Bildpunkt.

Glättungsfilter

- **Anwendung:**
 - Rauschunterdrückung
- **Arten:**
 - Boxfilter (Einleitendes Beispiel)
 - Binomialfilter
 - Gaußfilter

Grundsätzlich werden Filter, die Rauschen in Bildern unterdrücken, auch als Glättungsfilter bezeichnet, weil Rauschen Flächen oft als rauer erscheinen lässt. Diese Flächen erscheinen unverrauscht glatter.

Drei typische Glättungsfilter sind der simple Boxfilter (oder Mittelwertfilter) sowie etwas komplexere Binomialfilter oder der häufig verwendete Gaußfilter.

Rauschen / Noise

- **Hochfrequente Unregelmäßigkeiten** in einem Bild
- Minderung der Bildqualität
- z.B. durch Quantisierungsfehler



Rechts ist eine verrauschte Variante des Bildes „Lena“ zu sehen. Zufällig über das Bild verteilte farbige Bildpunkte verfälschen die ursprünglichen Farbinformationen.

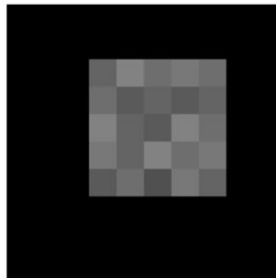
Derartiges Rauschen kann z.B. durch mit einer gewissen Häufigkeit auftretende Rundungsfehler bei ungenauer Quantisierung entstehen.

Rauschunterdrückung

- Wie können wir Rauschen im Bild unterdrücken bzw. beseitigen?



Glättung



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	100	130	110	120	110	0	0	0
0	0	0	110	90	100	90	100	0	0	0
0	0	0	130	100	90	130	110	0	0	0
0	0	0	120	100	130	110	120	0	0	0
0	0	0	90	110	80	120	100	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07; mod.

Eine ideale Glättungsoperation entfernt Rauschen und erhält Kanten.

“Glättung” verringert Rauschen

- **Grundannahme:**
Pixel sind ihren Nachbarn ähnlich.
 - Oberflächen ändern sich langsam.
 - nur geringfügige Abweichungen durch Lichteffekte
- **Grundannahme:**
Rauschen entsteht unabhängig auf verschiedenen Pixeln.
- Bei geeigneten Rauschmodellen kann **Glättung** Rauschen unterdrücken.
- **Skalierung**
 - Parameter in symmetrischer Gaußfunktion
 - Skalensteigerung bezieht mehr Pixel in Mittelung ein.
 - → zunehmende Rauschunterdrückung
 - → zunehmend verwischtes Bild

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07; mod.

Glättungsfilter können Rauschen verringern, sofern bestimmte Voraussetzungen erfüllt sind:

Wenn die verrauschten Bildpunkte eine im Originalbild bestehende Kontinuität durchbrechen und dabei nicht selbst eine eigene Kontinuität der Verfälschungen erzeugen, lassen sich die Fehler durch Mittelung der umgebenden Bildpunkte abschwächen. Dies funktioniert umso besser, je besser das der Glättung zugrunde liegende Modell der Ursache des Rauschens entspricht.

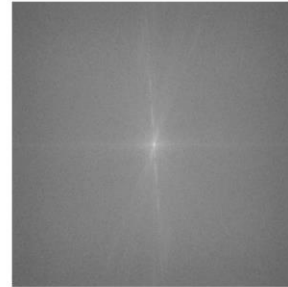
Je größer der zur Mittelung herangezogene Bereich ist, desto stärker wird die Glättung. Allerdings werden dabei auch hochfrequente Bildelemente (d.h. Bereiche stark unterschiedlicher Intensitätswerte benachbarter Pixel, z.B. an Kanten) geglättet, die nicht auf Rauschen zurück gehen. Das Bild verliert dadurch an Schärfe.

- **Aufgabe: Herausfiltern hoher Frequenzen**
(→ "Tiefpass")
 - **Wie entstehen hohe Frequenzen in einem Bild?**
 - Rauschen (Bildfehler)
 - (Objekt-)Kanten
 - hoher Kontrast
 - **Welche hohen Frequenzen sollen idealerweise herausgefiltert werden?**
 - natürlich das Rauschen, aber ...
 - alle anderen hohen Frequenzen werden ebenfalls gefiltert
- Folge: **Bild wird weichgezeichnet**



Tiefpass-Filter glätten Intensitätsschwankungen in der näheren Umgebung (d.h. hochfrequente Änderungen) eines Pixels. Dabei lassen sie Intensitätsänderungen mit niedrigen (d.h. „tiefen“) Frequenzen „passieren“, d.h. sie lassen sie ungehindert vom Original- in das Ergebnisbild übergehen. Daher werden sie als „**Tiefpass-Filter**“ bezeichnet.

- Abstände, mit denen sich die Graustufen benachbarter Pixel ändern, bestimmen das vorkommende **Frequenzspektrum**.
- **2D**
- Berechnung über **Fourier-Transformation**
 - Bestimmung aller vorkommenden Frequenzen in u- und v-Richtung



In der Mitte des Fourier-transformierten Bildes (Quadrat rechts) ist die Wechselfrequenz 0; d.h. die meisten unmittelbar benachbarten Pixel im Bild unterscheiden sich nicht bis kaum.

Rausch-Typen

- **Salt and pepper noise:**

- zufälliges Auftreten von schwarzen und weißen Pixeln

- **Impulsrauschen:**

- zufälliges Auftreten von weißen Pixeln

- **Gaussian noise:**

- Intensitätsabweichungen durch Gaußsche Normalverteilung bestimmt



Original



Salt and pepper noise



Impulse noise



Gaussian noise

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07

Rauschen kann auf verschiedene Weise entstehen und sich auch unterschiedlich äußern.

So kennt man z.B. „Salt & Pepper“ Noise, das durch auf dem Bild „verstreute“ weiße (Salz) und schwarze (Pfeffer) Pixel charakterisiert ist. S&P-Rauschen entsteht durch gelegentliches Verrutschen von einzelnen Intensitätswerten hin zu Extremwerten (Minimum Schwarz, Maximum Weiß).

Impulsrauschen dagegen zeichnet sich durch vereinzelttes Auftreten von extrem hellen (weißen) Pixeln aus.

Beim Gaußschen Rauschen folgt die Häufigkeitsverteilung unterschiedlich stark ausgeprägter Helligkeitsverfälschungen (Grauwerte) der symmetrischen Glockenkurve einer Gaußschen Normalverteilung.

- **Additives Rauschen:** $I(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$
 - mit dem verrauschten Bild $I(u, v)$
dem idealen Bild $F(u, v)$
und dem Rausch-Bild $N(u, v)$
 - Wenn das Rauschbild bekannt ist, dann kann $F(u, v)$ berechnet werden.
- **Korreliertes und unkorreliertes Rauschen**
 - **korreliert:** Rauschen eines Pixels des Bildsensors beeinflusst Nachbapixel
 - **unkorreliert:** keine Beeinflussung von Nachbarpixeln
 - Berechnung über die Kovarianzmatrix des Fehlerbildes

Ein verrauschtes Bild lässt sich verstehen als das Ergebnis der Überlagerung eines idealen Originalbildes mit einem „Rausch-Filter“.

Wäre der Rausch-Filter bekannt, könnte diese angenommene Operation umgekehrt und damit das unverrauschte Bild zurückgewonnen werden. Bei der Suche nach geeigneten Rausch-Filtern kann die Einordnung in einen bestimmten Filtertyp nützlich sein.

Finden sich bei der Betrachtung von Bildausschnitten über eine Kovarianzmatrix Abhängigkeiten der Intensitätsschwankungen von ihrer Nachbarschaftsbeziehung, so kann von einem korrelierten Rauschen ausgegangen werden.

Klassifikation von Rauschen (2)

- nach Mittelwert und Varianz
- nach der Verteilungsfunktion
 - z.B. Gaußverteilung oder Poissonverteilung
- nach der Art des Rauschens
 - Salt-and-Pepper noise
 - Thermisches Rauschen
 - Ausleserauschen
 - Quantisierungsrauschen
 - Verstärkerrauschen (z.B. Filmempfindlichkeit)
 -

Rauschmodelle lassen sich anhand verschiedener Kriterien in Kategorien einteilen.

Die Mittelung benachbarter Bildbereiche kann nach unterschiedlichen Algorithmen erfolgen (z.B. arithmetisches Mittel, Median, etc.).

Die Häufigkeitsverteilung der Abweichung verrauschter Pixel vom ursprünglichen Wert kann verschiedenen mathematischen Regeln folgen.

Schließlich kann Rauschen nach verschiedenen Ursachen kategorisiert werden.

Ideales Rauschen

- **signalunabhängig**
- **durch Gaußfunktion beschreibbar**
- **additiv**

aber: Rauschen nicht zwangsläufig hochfrequent
Bsp.: Quantisierungsrauschen kann auch
niederfrequente Artefakte erzeugen.

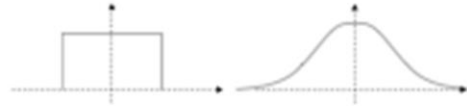
Rauschen an sich ist grundsätzlich eine Verfälschung der Originaldaten und somit nie „ideal“.

Wenn es bestimmte Voraussetzungen erfüllt, lässt es sich aber verhältnismäßig leicht und rückstandsarm beseitigen. Das trifft besonders dann zu, wenn das Originalsignal durch das Rauschen nicht vollständig verborgen wird, wenn also z.B. das Auftreten von Rauschen nicht von dem Originalsignal beeinflusst wird, die Häufigkeit bestimmter Verfälschungen einer Normalverteilung folgt und der Fehler sich mit dem ursprünglichen Signal in einer Weise verrechnet, dass dieses noch Spuren im Ergebniswert hinterlässt.

Während man gemeinhin den Begriff des Rauschens mit hochfrequenten Verfälschungen verbindet, kann Rauschen definitionsgemäß auch niederfrequent auftreten. Dies kann z.B. vorkommen, wenn durch ungenauer Quantisierungen ein regelmäßig auftretender Rundungsfehler die Überlagerung einer niederfrequenten Schwingung vortäuscht und dabei das Bild mit einer allmählichen Hell-/Dunkel-Schwankung überzieht.

Prinzip Glättungsfilter

- **lineare Filter** mit ausschließlich **positiven Filterkoeffizienten**
- **gewichteter Durchschnitt** über eine Filterregion



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Boxfilter

0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

Gaußfilter

- Jeder lineare Filter mit nur positiven Filterkoeffizienten ist eine Art Glättungsfilter
- Es wird immer ein gewichteter Durchschnitt über eine Filterregion berechnet

Optische Filter

- **Mittelwertfilter**

- Jedes Pixel erhält den Mittelwert aller angrenzenden Bildpunkte.

- **Gauß-Filter**

- gewichtete Mittelwertbildung

- **Median-Filter**

- statistischer Bildfilter

- **Sobel-Filter**

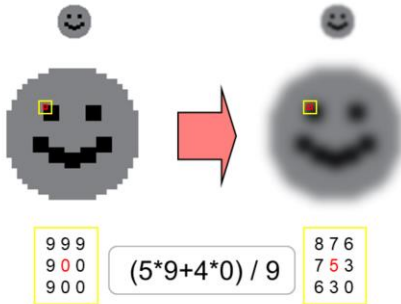
Kanten-
Glättung

Kanten-
Erkennung

Optische Glättungsfilter entfernen Rauschen aus gerasterten Bilddaten.

Mittelwertfilter

Jedem Bildpunkt wird das **arithmetische Mittel** aller angrenzenden Bildpunkte zugewiesen.



- **Faltungsfiler mit Kernel**
1/9 1/9 1/9
1/9 1/9 1/9
1/9 1/9 1/9
- **Schrittweite:**
1 Pixel des Originals
- **Wertzuweisung je**
an zentrales Pixel
- **Weichzeichnungseffekt**

identisch mit Boxfilter

Mittelwert-Filter und Maske

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

$H[u,v]$

$F[x,y]$

$G[x,y]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	10	20	30	30	30	20	10	
	0	20	40	60	60	60	40	20	
	0	30	60	90	90	90	60	30	
	0	30	50	80	80	90	60	30	
	0	30	50	80	80	90	60	30	
	0	20	30	50	50	60	40	20	
	10	20	30	30	30	30	20	10	
	10	10	10	0	0	0	0	0	

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

Ergebnis der Mittelwert-Filterung

- **Mittelwertfilter mit unterschiedlich großen Kernen**



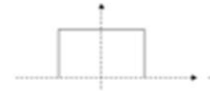
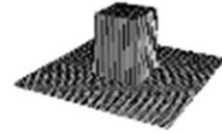
Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07;
modif.

Die Bilder zeigen das Ergebnis der Glättung auf verschiedene Art verrauschter Bilder durch einen Mittelwertfilter mit unterschiedlich großem Filterkern.

Es zeigt sich, dass ein Gaußsches Rauschen schneller (d.h. in engerer Umgebung) auf den Mittelwertfilter reagiert als Salt-and-Pepper-Rauschen.

noch einmal: Boxfilter

- einfachster Mittelwertfilter
- Alle Pixelwerte des Eingangsbildes werden im Filterbereich gleich stark gewichtet.
 - entweder 0 oder 1
 - scharf abfallende Kante
- kann beliebig groß sein
- Einsatzgebiet:
 - Entfernen von Bildfehlern, Glättung



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Anwendungsbeispiel Boxfilter



Abbildung 8.2: Verursachtes Bild und Ergebnisbild nach Mittelwertfilterung mit einem 3×3 -Kern

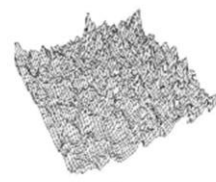
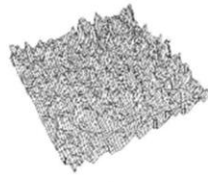


Abbildung 8.4: Ergebnisbild nach Mittelwertfilterung von Abb. 8.3a)
a) mit einem 5×5 -Kern, b) mit einem 7×7 -Kern

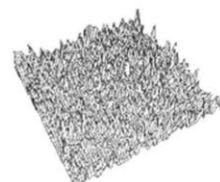
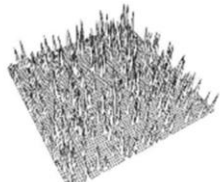


Abbildung 8.3: Rauschbild und Ergebnisbild nach Mittelwertfilterung mit 3×3 -Kern

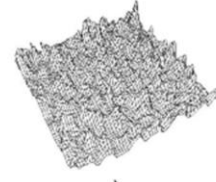
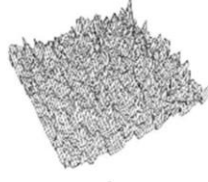


Abbildung 8.5: Ergebnisbild Mittelwertfilterung von Abb. 8.3a) mit einem 3×3 -Kern
a) dreimalige Filterung, b) fünfmalige Filterung

Bildquelle: Ehrhardt, A.: Einf. i.d. DBV

Quelle: GBV, Kahl/Mannuß WS 2012/13

Binomialfilter

- Mittelwertfilter mit gewichtetem Kernel
- Berechnung der Filterkernelemente aus Binomialkoeffizienten

- für Filterkern mit Größe $s = 2m+1$
- Binom der Ordnung $n = s-1$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

- Beispiel für $s=5 \Rightarrow n=4$

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

- Berechnung von $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Quelle: GBV, Kahl/Mannuß WS 2012/13

Allgemein bezeichnet ein "**Binom**" einfach einen Term, der die Summe (oder Differenz) aus zwei Gliedern ausdrückt.

Entsprechend beschreiben die bekannten **Binomischen Formeln** die Berechnung der Multiplikation beliebiger Binome, z.B.:

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

Für ein **Binom der Ordnung $n=2$** (entsprechend einer **3x3-Matrix** mit der Schrittweite **$m=1$** in jede Richtung vom Zentrum aus und somit der Größe **$s=3$**) entstehen beim Ausmultiplizieren mit dem Exponenten n die

3 Binomialkoeffizienten: 1,2,1

Diese finden sich im Filterkern **jeweils in horizontaler und vertikaler Richtung** wieder: [1 2 1]

Im Zentrum multiplizieren sich die Koeffizienten aus beiden Richtungen zu $2*2=4$

Das Resultat ist ein Binomialfilter, der sich mit zunehmender Größe über eine Poisson-Verteilung an die Gauß-Verteilung (Gauß'sche Glockenkurve) annähert und deshalb als "**Gauß-Filter**" bezeichnet wird.

Die Gauß-Funktion ist in Orts- und Frequenzraum fast identisch und liefert somit einen fast perfekten Tiefpass-Filter.

Anwendungsbeispiel Binomialfilter

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{bmatrix}$$



Original



Binomialfilter mit m=5

Eigentlich – bezogen auf die vorangegangene Folie – gilt für dieses Beispiel:

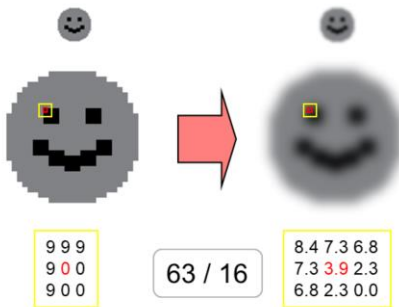
Matrix-Größe s = 5 (5x5-Matrix)

Schrittweite m = 2 (Matrix-Koordinaten je {-2,-1,0,1,2})

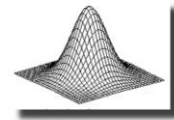
Exponent n=4 (Binom 4. Ordnung $(x+y)^4 \rightarrow$ Koeffizienten [1,4,6,4,1])

Gauß-Filter als Weichzeichner

Ein **gewichteter Mittelwert** bildet die Grundlage für die neuen Werte der Bildpunkte.



- Gauß-Glockenkurve für Wichtung der Beiträge angrenzender Bildpunkte
- z.B. Wichtungs-Kernel
1 2 1
2 4 2
1 2 1
- selektiver Weichzeichner, erhält starke Kontraste



Gauß-Filter

Definition Kernel/Maske

$F[x,y]$

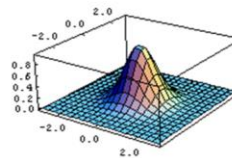
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$H[u,v]$

Diese Maske
ist eine
Approximation
einer Gauß-
funktion:

$$h(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u^2+v^2}{\sigma^2}}$$



Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07

Gauß-Filter = "Gaussian,, (Engl.)

Gaußfilter (Herleitung)

- Berechnung der Filterkernelemente aus der Gaußfunktion

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Standardabweichung σ
- Filterkerngröße: $s=2m+1$ mit $2\sigma \leq m \leq 3\sigma$
Bsp: $\sigma = 1.2 \Rightarrow 2.4 \leq m \leq 3.6$
- Berechnung Filterkernel:
 $H(i) = [g(-m), g(-m+1), \dots, g(-1), g(0), g(1), \dots, g(m-1), g(m)]$
- Beispiel mit $\sigma = 1.2$ und $m = 2.5 \Rightarrow \sigma = 3$

$$H(i) = [0.015, 0.083, 0.235, 0.332, 0.235, 0.083, 0.015]$$

$$H(i) = 1/69 \cdot [1, 6, 16, 23, 16, 6, 1]$$

Aus der Gauß'schen Verteilungsfunktion ergibt sich eine bekannte Größe der Statistik, die häufig in Signifikanzüberprüfungen Anwendung findet: die Standardabweichung σ als Abweichung von einem repräsentativen (Mittel-)Wert in alle Richtungen, innerhalb deren Grenzen Schwankungen keine Signifikanz begründen.

Hier bestimmt σ als Parameter die Breite der Glockenkurve und damit die Abstände zwischen den Binomialkoeffizienten in der Filtermatrix.

Anwendungsbeispiel Gaußfilter

Übergang zu 2D:
$$g(x, y) = \frac{1}{\sigma^2 \cdot 2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

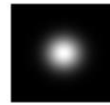
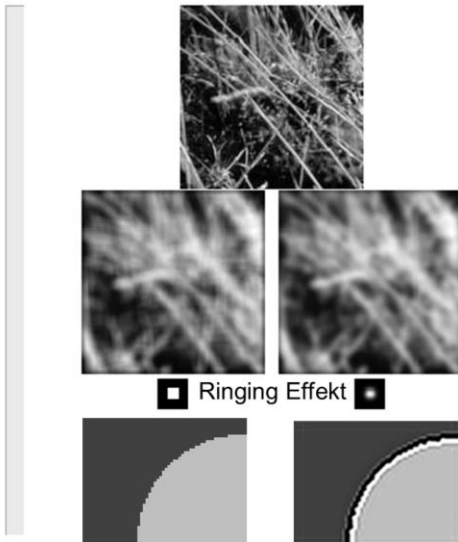


Original



Gaußfilter mit $\sigma = 1.2$

Mittelwert vs. Gauß-Filterung



Isotroper
Gaussian

- Das Bild zeigt einen Glättungsfilter proportional zu

$$\exp\left(-\left(\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

- (Modell für einen zirkularen symmetrischen an den Kanten geglätteten Punkt)

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07; modif.

Der Gaußfilter als Glättungsfilter vermindert als Mittel der Bildverarbeitung Artefakte wie den „Ringing“-Effekt, der scharfe Kontraste durch hohe Zwischengradienten an Kanten erzeugt. Bei genauer Betrachtung entstehen über- und unterschießende Intensitäten in der Nachbarschaft der Kante wie eine abklingende Welle anstelle der scharfen (und damit lokal maximal hochfrequenten) Kante.

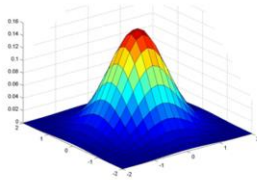
Ringing-Effekte entstehen als Artefakte beim Einsatz von Tiefpassfiltern und äußern sich als eine Art optischer „Nachhall“ (~“Ringing“) an scharfen Kanten. Ein Gauß-Filter ist dabei weniger anfällig für solche Artefakte als bspw. ein Boxfilter.

Untere Bilder: Wikipedia, Ringing artifacts, [access 29.04.2019]

Cause: non-oscillating input produces oscillating output

Gaussian Kernel (5 x 5)

- **Idee: Gewichtung der Beiträge benachbarter Pixel nach Nähe**



0.003	0.013	0.022	0.013	0.003
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.022	0.097	0.159	0.097	0.022
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.003	0.013	0.022	0.013	0.003

5 x 5, $\sigma = 1$

- **Konstanter Faktor setzt Summe der Gewichte auf 1**
(kann ignoriert werden, weil Gewichte ohnehin normalisiert werden sollten)

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07; modif.

2-dimensionale Gauß-Funktion $G(x,y)$

mit (x,y) = Pixelkoordinaten und


σ = Standardabweichung (= Breite der Normalverteilung), wobei ca. 68% aller Messwerte innerhalb $MW \pm \sigma$ liegen [vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung>, 01.06.2012]

Bsp.: $G(2,2)$ in einer 3x3-Matrix (d.h. der Wichtungsfaktor für den zentralen Pixel) und $\sigma=1$: $(1/(2 \cdot 3,14 \dots \cdot 1)) \cdot \exp(-((4+4)/2)) = (1/(6,28 \dots)) \cdot \exp(-4) = 0,159 \dots \cdot 0,018 \dots = 0,0029 \dots$

→ ggf. noch einmal nachrechnen!

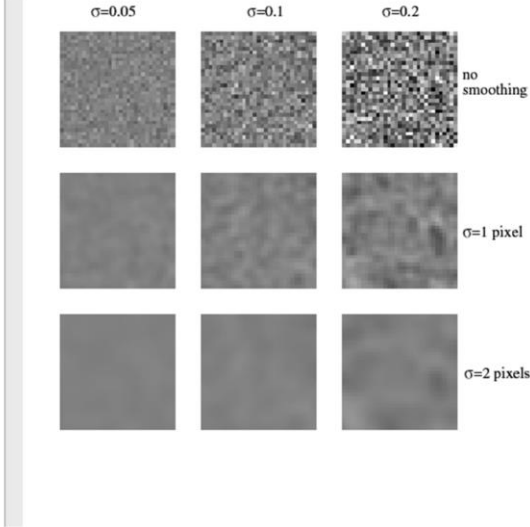
(vgl. Folie "Gauß-Filter Definition Kernel/Maske")

Glättungseffekte



Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg

**Grundlagen der
Bildverarbeitung**



- **Spalten:**
 - Gauß'sches Rauschen mit unterschiedlichen Parametern
- **Zeilen:**
 - Glättung mit Gaußfunktionen unterschiedlicher Breite

Zur Illustration zweier unterschiedlicher Bedeutungen des Begriffs "Gaussian"!

SS 2022

Operationen im Ortsraum

54

Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07; modif.

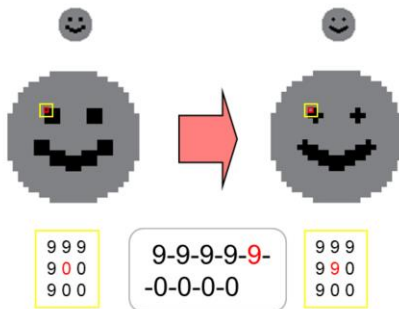
“There are two notions of gaussian here, related only by a vague analogy.

I did this slide like this to put them clearly in apposition, because this point always confused me. There's no particular reason that gaussian noise should attract smoothing with a gaussian kernel, just an irritating coincidence.”

(unbekannter Autor der von Prof. Herpers übernommenen Folie)

Median-Filter

Unter den angrenzenden Werten
wird der mittlere in auf- od.
absteigender Reihe ausgewählt.

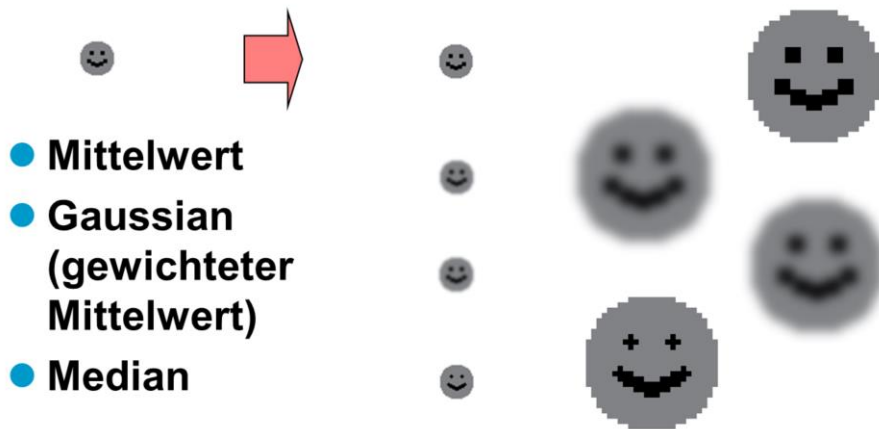


- Sortierung der Pixel-Werte
- Auswahl des zentral gelegenen Wertes
- ausschl. Verwendung bestehender Werte
- Kantenglättung ohne Weichzeichnung

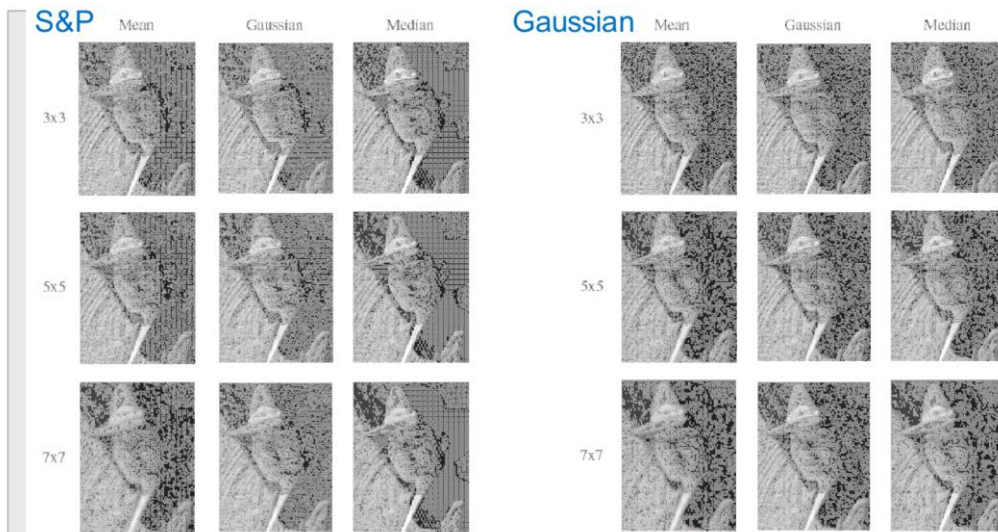
Median ist kein linearer Filter (und erst recht kein Faltungsfilter)!

(wohl aber ein Glättungs- bzw. Tiefpassfilter)

Glättungsfilter im Vergleich



Salt and Pepper vs. Gaussian Noise



Quelle: Mediz. BV, Rainer Herpers, WS 2006/07

Anhand dieses Beispiels scheint sich doch zu zeigen (und ist wenig überraschend), dass ein Gauß'scher Glättungsfilter die besten Ergebnisse bei einem Bild erzielt, das zuvor mit Gauß'schem Rauschen verfremdet wurde.

Kompetenzcheck

- **Kreuzkorrelationsfilter**

- Lineare Filter
- Faltungsfiler
- Randbehandlung



- **Glättungsfiler**

- Rauschen
- Boxfilter
- Binomial-, Gauß-Filter
- Median-Filter

