

Hochpassfilter

Bildoperationen im Ortsraum:
spezielle Faltungsfilter
zur **Kantendetektion** und -verstärkung

Wolfgang Heiden © 2014-22, mit Beiträgen von R. Herpers, F. Mannuß, B. Kahl, G. Heisenberg

Wolfgang Heiden © 2014-22 wolfgang.heiden@h-brs.de

-- auf der Grundlage einer Lehrveranstaltung von Prof. Dr. Rainer Herpers sowie Folien von Florian Mannuß 2011, Dr. Björn Kahl 2012, Prof. Dr. G. Heisenberg, 2013 --

Fachbereich Informatik (Dpt. Computer Science)

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg – University of Applied Sciences,

53754 Sankt Augustin

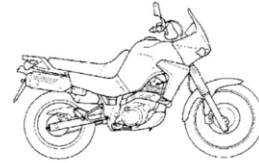
Germany

- **Anwendungsgebiete**

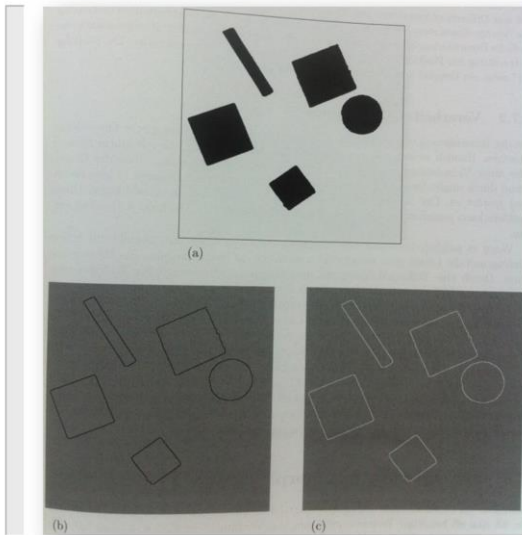
- **Detektion** von Kanten
- **Schärfung** von Kanten

- **Hintergrund**

- Kanten bedeutend für visuelle Wahrnehmung und Interpretation:
„Das Wichtige sind die Änderungen.“
- Oft genügen wenige Konturlinien, um einen Gegenstand zu erkennen.



Wiederholung: Extraktion des Randes von Segmenten über morphologische Operatoren



(a) Original: dunkle Segmente (0) auf hellem Hintergrund (1 oder 255)

(b) Dilatation und Differenz, $g=127$ addiert

(c) Erosion und Differenz, $g=127$ addiert

Wie sind die Ergebnisse zu interpretieren?

→ b) erzeugt nur den inneren Rand der Segmente.

→ c) erzeugt Ränder, die die Segmente komplett enthalten.

Quelle: Nischwitz, Fischer, Haberäcker, Socher: Computergrafik und Bildverarbeitung

b) erzeugt nur den inneren Rand der Segmente.

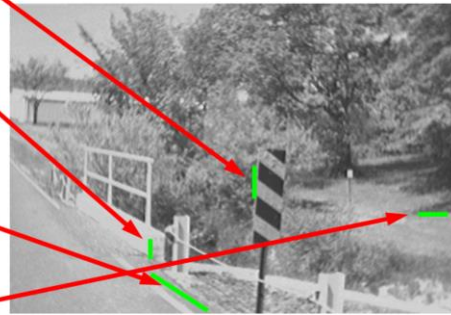
Bild c) erzeugt Ränder, die die Segmente komplett enthalten (d.h. außen umschließen).

ANMERKUNG: Die Folie ist korrekt für die typische Anwendung mit hellen gesetzten und dunklen ungesetzten Pixeln. Betrachtet man die (dunklen) „Objektpixel“ als „gesetzt“, dann müssten Dilatation und Erosion umgekehrt verwendet werden, was auch dem intuitiven Verständnis entspräche. [wh]

Quelle: Heisenberg

Kanten in Bildern durch Diskontinuität

- **Tiefendiskontinuität**
- **Oberflächenorientierungs-**
diskontinuität
- **Reflektanzdiskontinuität**
 - (z.B. Änderungen der
Oberflächeneigenschaften)
- **Beleuchtungsdiskontinuität**
 - (z.B. ein Schatten)



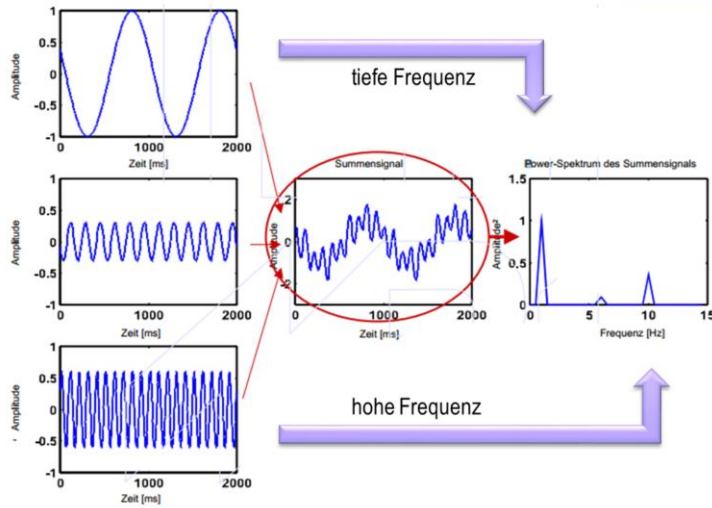
Kanten in Bildern entstehen durch Diskontinuitäten, die in der abgebildeten realen Szenerie unterschiedliche Ursachen haben können.

- Wie entstehen Kanten?
→ **Intensitätsänderungen**
 - auf kleinstem Raum und
 - entlang einer ausgeprägten Richtung
- Je stärker die Intensitätsänderung an einer Stelle, umso größer der Hinweis für eine Kante dort.
- *Aber:* Auch Bildfehler können zu starken Intensitätsänderungen führen.



Fouriertransformation

Wiederholung



Bildquelle: TUM MRI

Quelle: Heisenberg

Transformationen vom Zeit-/Ortsraum in den Frequenzraum

Wiederholung

Laplace-Transformation für $f(t)$

Quelle: <http://www.sosmath.com/diffeq/laplace/basic/basic.html>

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt.$$

Fourier-Transformation für $f(t)$

Quelle: <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/analysis/df/>

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

1D Diskrete Cosinus-Transformation für $f(t)$

Quelle: <http://www.cs.cf.ac.uk/Dave/Multimedia/node231.html>

$$F(u) = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} \Lambda(i) \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot u}{2 \cdot N} (2i + 1)\right] f(i)$$

2D DCT (NxM) für $f(t)$ {Bilder}

Quelle: <http://www.cs.cf.ac.uk/Dave/Multimedia/node231.html>

$$F(u, v) = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \Lambda(i) \cdot \Lambda(j) \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot u}{2 \cdot N} (2i + 1)\right] \cos\left[\frac{\pi \cdot v}{2 \cdot M} (2j + 1)\right] \cdot f(i, j)$$

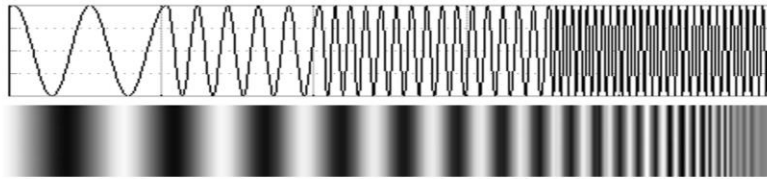
DFT (Diskrete Fourier-Transformation)

- diskrete Frequenzen
- komplexe Zahlen

FFT (Fast Fourier Transform)

- beschleunigter FT-Algorithmus
- Cooley & Tukey, 1965
- Voraussetzung: Anzahl der Einzelwerte ist ein Vielfaches von 2

Was passiert hier eigentlich? Wieso „Hochpass-gefiltert“?



zunehmende Frequenz in einem Bild



Original

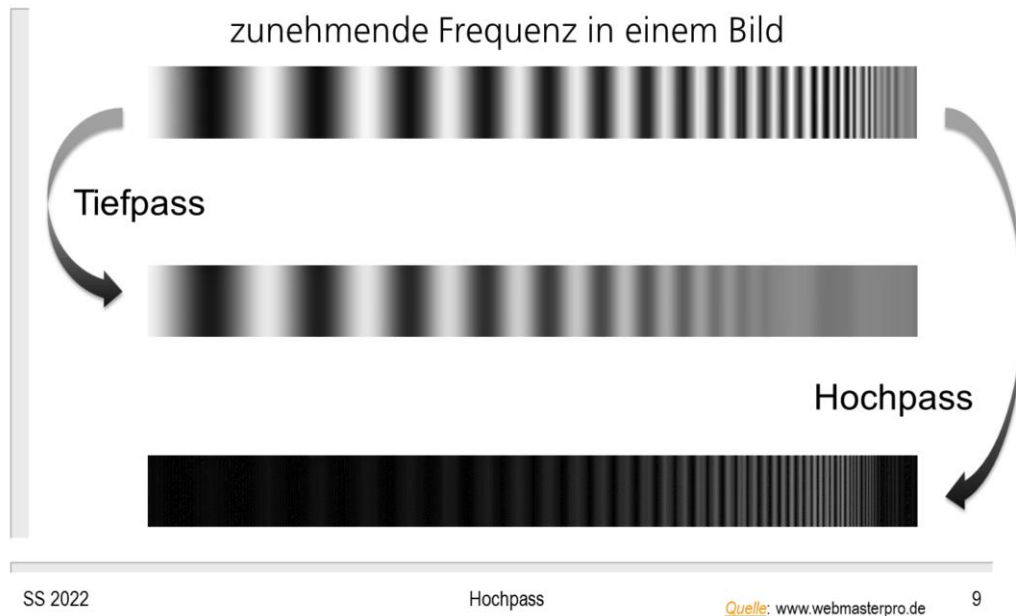
Hochpass-
gefiltert

↑
Kante

„Hochpass“-Filterung lässt hohe Frequenzen „passieren“; d.h. hochfrequente Bildanteile (Bereiche mit hohen Intensitätswechseln auf kleinen Abständen, also mit hohen Intensitätsgradienten) werden ins Ergebnis übertragen, während Bildbereiche mit niedrigen Frequenzen geglättet werden.

Quelle: Heisenberg (mod.:wh)

Tiefpass und Hochpass bei Bildern



Niedrige Frequenzen im Originalbild führen bei Hochpassfiltern zu niedrigen Intensitätswerten (d.h. dunkle Grauwerte), während hohe Frequenzen hohe (d.h. helle) Werte liefern.

Quelle: Heisenberg

Tiefpass- und Hochpassfilter



• Tiefpass-Filter

- lässt tiefe Frequenzen „passieren“
- tiefe Frequenzen erhalten
- hohe Frequenzen abschwächen
- → Rauschen entfernen



• Hochpass-Filter

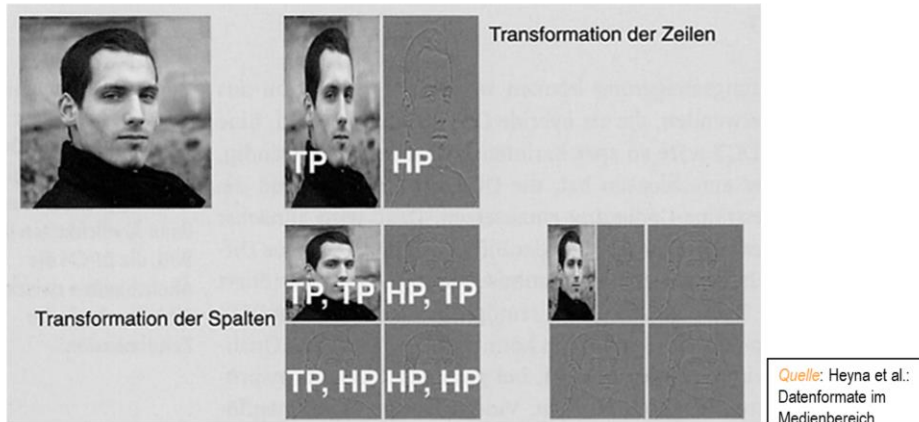
- lässt hohe Frequenzen „passieren“
- hohe Frequenzen erhalten
- tiefe Frequenzen abschwächen
- → Kanten verstärken



Ein Filter lässt das Benannte „passieren“ → Tiefpass erhält tiefe Frequenzen, Hochpass hohe.

Anwendungsbeispiel TP & HP bei der Bild-Codierung: DWT

TP = Tiefpass → Mittelwert benachbarter Pixel
HP = Hochpass → Differenz zum Mittelwert



Bei der Diskreten Wavelet-Transformation (DWT) werden abwechselnd Tief- und Hochpassfilter angewandt, um ein Bild in Komponenten aufzuteilen, die sich ohne signifikanten Qualitätsverlust mit unterschiedlicher Genauigkeit quantisieren lassen, um so bei der Codierung Speicherplatz einzusparen.

Im einfachsten Fall wird als Tiefpassfilter für jeweils zwei benachbarte Pixel der arithmetische Mittelwert berechnet und als Hochpassfilter dessen Abweichung zu den tatsächlichen Werten.

Näheres dazu wird im Studienmodul „Hypermedia“ behandelt.

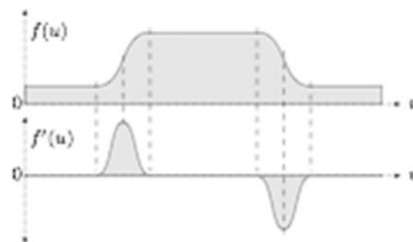
Hochpass als 1. Ableitung

- mathematische Betrachtung:
Intensitätsänderung auf kleinstem
Raum \rightarrow **Erste Ableitung** der
Bildfunktion

$$f'(u) = \frac{df}{du}(u)$$



(a)



(b)

- **Bilder sind zweidimensionale Funktionen.**
→ **partielle Ableitung** in **u-** und **v-Richtung**

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u}$$

- hier für den kontinuierlichen Fall,
aber Bilder sind glücklicherweise diskret!

Quelle: GBV, Kahl/Mannuß WS 2012/13

- Partielle Ableitung der Bildfunktion $I(u, v)$

- $\Delta(u, v)$ minimal

bei Schrittweite 1 \Rightarrow

$$\frac{\partial I(u, v)}{\partial u} = I(u + 1, v) - I(u, v)$$

$$\frac{\partial I(u, v)}{\partial v} = I(u, v + 1) - I(u, v)$$

$$\frac{\partial I(u, v)}{\partial u} = I(u, v) - I(u - 1, v)$$

$$\frac{\partial I(u, v)}{\partial v} = I(u, v) - I(u, v - 1)$$

=> diskrete partielle Ableitung ist eigentlich nur Differenzbildung zu Nachbarpixeln

Herleitung von Differenzoperatoren zur Kantenerkennung

$s(t)$ ist eine stetige Funktion,
dann ist die erste Ableitung von $s(t)$ definiert als:

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta x}$$

Die Differenzenbildung bei einer Funktion mit diskretem Wert x lautet:

$$\frac{s(x+1) - s(x)}{1} = s(x+1) - s(x)$$

Da ein Eingangsbild $S_e = s_e(x, y)$ eine Funktion mit 2 diskreten Variablen ist, ergibt sich für den Gradienten:

$$\text{grad}(s(x, y)) = \nabla s(x, y) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y} \right)^T = \begin{pmatrix} s(x+1, y) - s(x, y) \\ s(x, y+1) - s(x, y) \end{pmatrix}$$

Der Filterkern (Maske) \mathbf{H} hat damit für die partiellen Ableitungen das folgende Aussehen:

$$H_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte: H_x hat Werte ungleich 0 vertikal zueinander, erzeugt deshalb hohe Werte, wenn der vertikale Gradient hoch ist und betont daher horizontal verlaufende Kanten! (Bei H_y ist es umgekehrt.)

Verwendung des Filterkerns (grundsätzlich): Multipliziere die jeweiligen Intensitätswerte unter dem Filterkern mit dem dortigen Kernelwert und summiere alles, ggf. anschl. normieren.

Quelle: Heisenberg

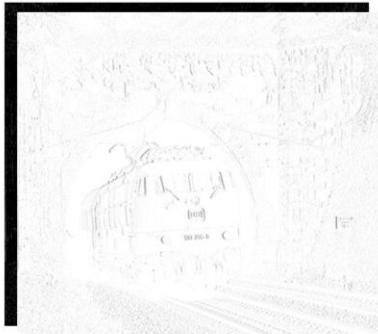
Differenzoperator

- Ableitung in eine Richtung

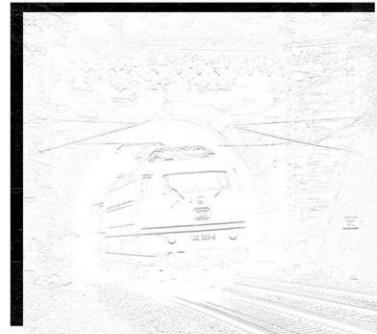
Bildbeispiele invertiert!

$$h_{vert}(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{horiz}(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Betonung senkrechter Kanten



Betonung waagerechter Kanten

helle Bildbeispiele invertiert → zur besseren Sichtbarkeit

Roberts-Operator

- Differenzen in diagonaler Richtung

Bildbeispiele invertiert!

$$h_{ro}(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{ro}(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Betonung abwärts diagonalen Kanten



Betonung aufwärts diagonalen Kanten

helle Bildbeispiele invertiert → zur besseren Sichtbarkeit

abwärts/aufwärts je nach Sichtweise; links Kanten, die von links unten nach rechts oben verlaufen (Gradienten umgekehrt), rechts umgekehrt.

Roberts-Operator ist ein um 45° gekippter Differenz-Operator.

Differenzoperatoren zur Kantenerkennung

Die reinen Differenzoperatoren sind als sehr einfache, richtungsabhängige Filterkerne zur Kantenbestimmung sehr **störanfällig**, z.B. gegenüber Rauschen:

$$H_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Besser sind Kerne, die zur Differenzbildung **weitere Nachbarn** hinzuziehen.

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Noch bessere Ergebnisse liefert der **Sobel-Operator**, der beide Seiten einer potenziellen Kante stärker gewichtet, besonders entlang der Bildkoordinaten-Achsen.

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Filteroperatoren sind nicht auf Größe 3x3 beschränkt.
- Nachteile von Differenz- und Roberts-Filter
 - Rauschanfälligkeit
(Differenzbildung verstärkt Rauschen)
- **Lösung:**
Operator, der zugleich ableitet und mittelt

→ z.B. **Prewitt-** oder **Sobel-Operator**

Prewitt-Operator

$$h_{pu}(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

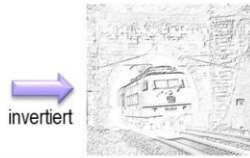
Betonung waagerechter Kanten

$$h_{pv}(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Betonung senkrechter Kanten

$$h_{pd}(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonale → +/- alle Kanten



invertiert

Drehung um -45° wäre auch möglich.

Eigenschaften des Prewitt-Operators

- **Hervorheben von Kanten bei Minderung von zufälligem Bildrauschen**
- **Mittelung**
 - linear
 - senkrecht zur Ableitungsrichtung
 - z.B.: Ableitung in u -Richtung \rightarrow Mittelung in v -Richtung
- **Bei Rotation um 45° (Diagonale) werden Kanten in Richtung der Haupt- und Nebendiagonalen hervorgehoben.**

- gewichteter Prewitt-Operator
- Mittelung durch Gaußfilter
- Sobel-Operator durch Linearkombination zweier Prewitt-Operatoren

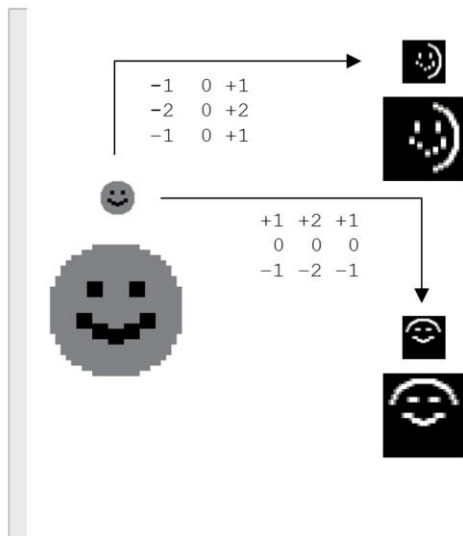
$$h_s(i, j) = -h_{pd,1}(i, j) + -h_{pd,2}(i, j)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Unter den einfachen Kantenoperatoren ist der Sobel-Operator der am häufigsten verwendete.

Er beinhaltet Differenzbildung und gewichtete Mittelung und vereint so die Vorzüge eines Gaußfilters mit denen eines Kantenfilters. Da die von diesem Filter identifizierten Kanten richtungsabhängig nur an einer Seite auftreten (ansteigender oder abfallender Gradient), wird dieser Operator in der Regel zweimal mit wechselnder Richtung angewandt, wenn Kanten auf beiden Seiten von Bildobjekten gefunden werden sollen.

Sobel-Filter zur Kantendetektion



- **zwei 3x3 Filterkerne, zueinander 90° rotiert für x und y Richtung**

- $-1 \ 0 \ +1$ $+1 \ +2 \ +1$
 $-2 \ 0 \ +2$ $0 \ 0 \ 0$
 $-1 \ 0 \ +1$ $-1 \ -2 \ -1$

- **Erkennung von Kanten**

- optimiert für senkrechte und waagerechte Kanten
- Empfindlichkeit ist richtungsabhängig

Korrigiert: Hier sind die Filterkerne wahrscheinlich richtig → prüfen !!!! (wh, 11.07.2018)

Sobel-Operator

$$h_{su}(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

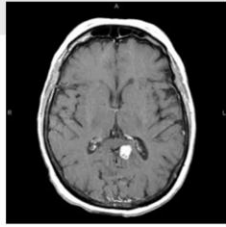
$$h_{sv}(i, j) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_{sd}(i, j) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



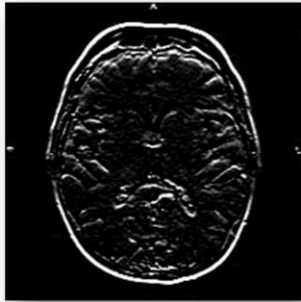
su = Sobel-Operator in u-Richtung
sv = Sobel-Operator in v-Richtung
sd = Sobel-Operator diagonal

Sobel Operator - Anwendungsbeispiel

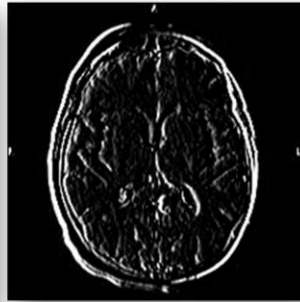


Original

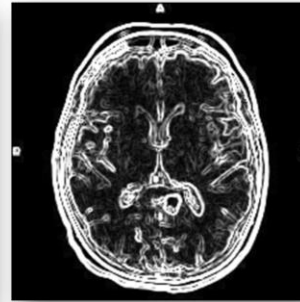
Sobel in x



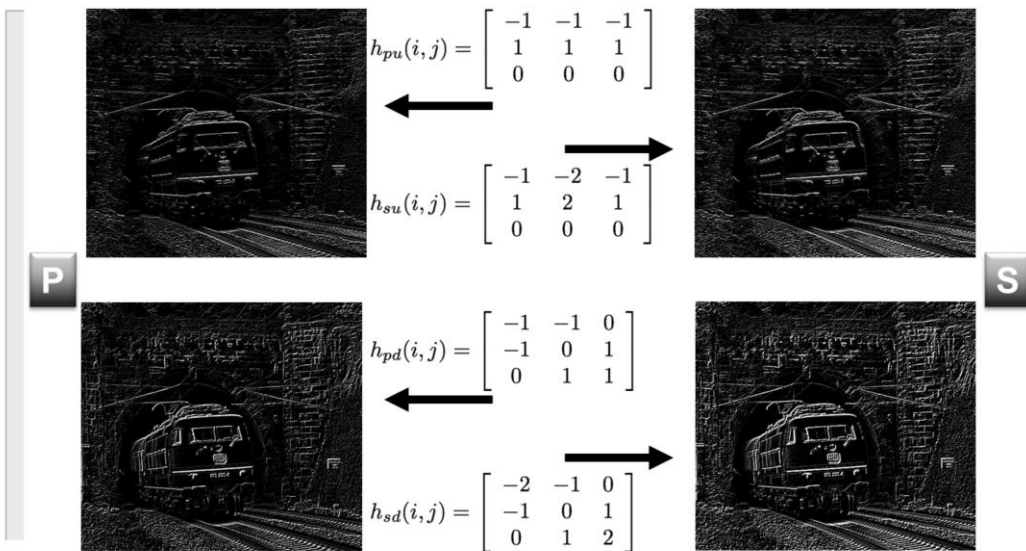
Sobel in y



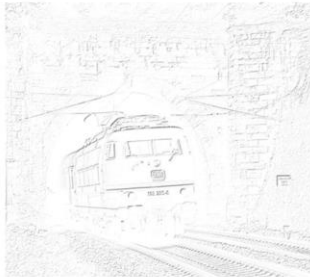
Kombinierter
Sobel



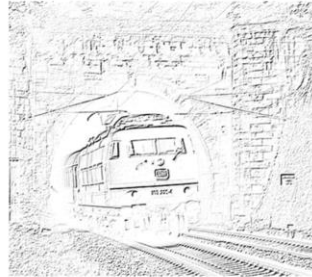
Prewitt vs. Sobel



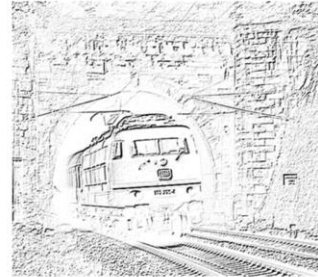
Vergleich verschiedener Hochpass-Operatoren



Roberts-Operator
(abwärts diagonale
Differenz)



Prewitt-Operator
(umgebende diagonale
Differenz)



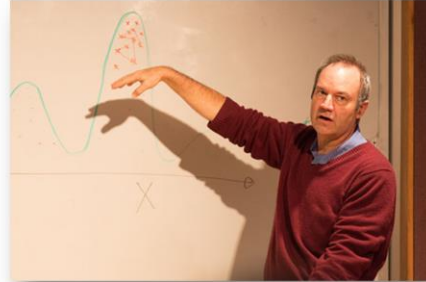
Sobel-Operator
(gewichtete umgebende
diagonale Differenz)

- **Laplace-Operator**
 - zweite Ableitung
- **Canny-Filter**
 - meist genutzt
 - einer der besten Kantendetektoren
 - mehrphasiges Vorgehen

Details folgen
später ...

Canny Kantendetektor

- J.F. Canny, 1984
- gilt als optimaler Kantendetektor
- geringe Fehlerrate
- minimaler Abstand zwischen Kantenpunkten und tatsächlichen Kanten
- nur eine einzelne Antwort auf eine Kante



Source 1:

<http://www.pages.drexel.edu/~pyo22/students/designTeams/kite2001WorkFolder/cannyEdgeDetector.pdf> (portrait)

Original work: Canny, J.F. A computational approach to edge detection. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6): 679-698, Nov 1986.

Canny Kantendetektor: Mehrstufen-Prinzip

1. Glättung

- Gauß-Filter
- entfernt Rauschen, Texturen, Feinstruktur

2. Gradientenberechnung

- z.B. Sobel-Filter
- markiert Regionen mit hohen Werten der Ortsableitung

3. Nicht-Maximum-Unterdrückung

- nicht-maximale Pixel entlang Gradienten-Richtung nullen
- entfernt Kantenränder → dünne Kantenlinien

4. Hysterese

- Hinzunahme von Pixeln oberhalb niedrigem Schwellwert T_1 , die mit Pixeln oberhalb hohem Schwellwert T_2 verbunden sind
- → verbindet unterbrochene Linien

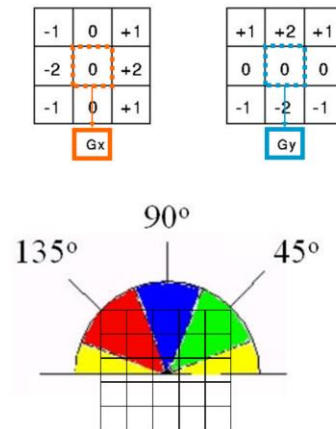
Source 1:

<http://www.pages.drexel.edu/~pyo22/students/designTeams/kite2001WorkFolder/cannyEdgeDetector.pdf> (portrait)

Original work: Canny, J.F. A computational approach to edge detection. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6): 679-698, Nov 1986.

Hysterese (griech.: hysteros = hinterher) bezeichnet das Fortdauern einer Wirkung nach Wegfall ihrer Ursache. (wikipedia, 05.12.2007) = Hysteresis

- **Gradientenberechnung (z.B.) mit Sobel-Filter**
- **Gradientenstärke:**
 $|G| = |G_x| + |G_y|$
- **Gradientenrichtung θ :**
 - $G_x=0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$; $G_y=0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$
 - *allg.:* $\theta = \arctan (G_y/G_x)$
- praktisch (5x5 Pixel Matrix,
Gradient an zentralem Pixel):



Quelle: <http://www.pages.drexel.edu/~nk752/cannyTut2.html>

Once the edge direction is known, the next step is to relate the edge direction to a direction that can be traced in an image. So if the pixels of a 5x5 image are aligned as follows:

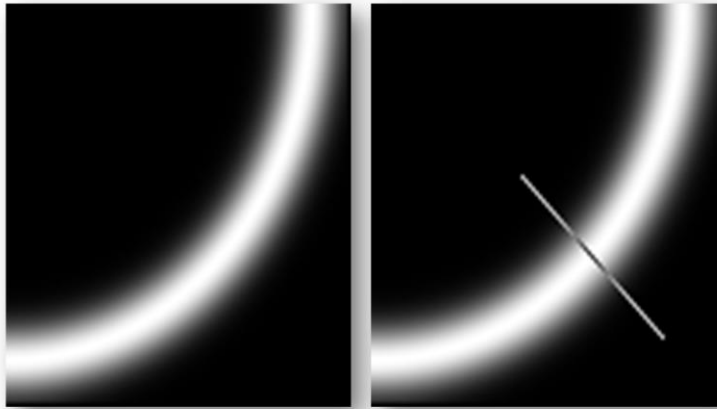
```

x x x x x
x x x x x
x x a x x
x x x x x
x x x x x
    
```

Then, it can be seen by looking at pixel "a", there are only four possible directions when describing the surrounding pixels - **0 degrees** (in the horizontal direction), **45 degrees** (along the positive diagonal), **90 degrees** (in the vertical direction), or **135 degrees** (along the negative diagonal). So now the edge orientation has to be resolved into one of these four directions depending on which direction it is closest to (e.g. if the orientation angle is found to be 3 degrees, make it zero degrees). Think of this as taking a semicircle and dividing it into 5 regions.

Therefore, any edge direction falling within the **yellow range** (0 to 22.5 & 157.5 to 180 degrees) is set to 0 degrees. Any edge direction falling in the **green range** (22.5 to 67.5 degrees) is set to 45 degrees. Any edge direction falling in the **blue range** (67.5 to 112.5 degrees) is set to 90 degrees. And finally, any edge direction falling within the **red range** (112.5 to 157.5 degrees) is set to 135 degrees. *Quelle:* http://www.pages.drexel.edu/~weg22/can_tut.html

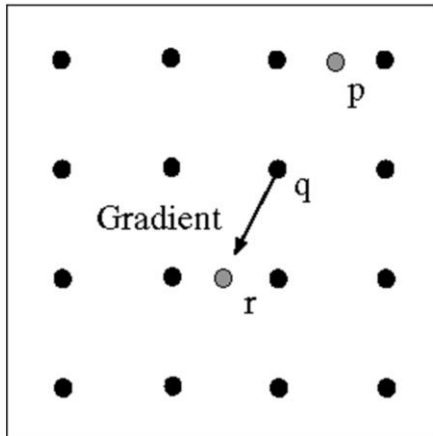
Nicht-Maxima-Unterdrückung (Non-maximum suppression)



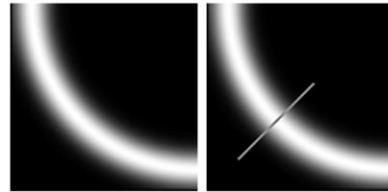
Gehe senkrecht zur Kante und wähle den Pixel mit dem globalen Maximum als Kantenpunkt (Kantenpixel).
Dadurch wird die Kante nur einen Pixel breit.

Senkrecht zur Kante entspricht entlang dem Gradienten.

Nicht-Maxima-Unterdrückung (Non-maximum suppression)



An Position q muss der Wert größer sein als die interpolierten Werte an p oder r .

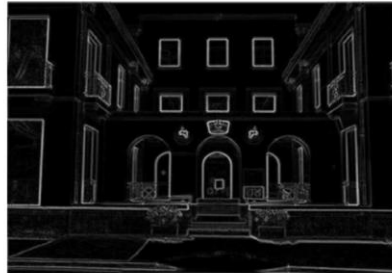


Beispiel: Nicht-Maxima-Unterdrückung



Original

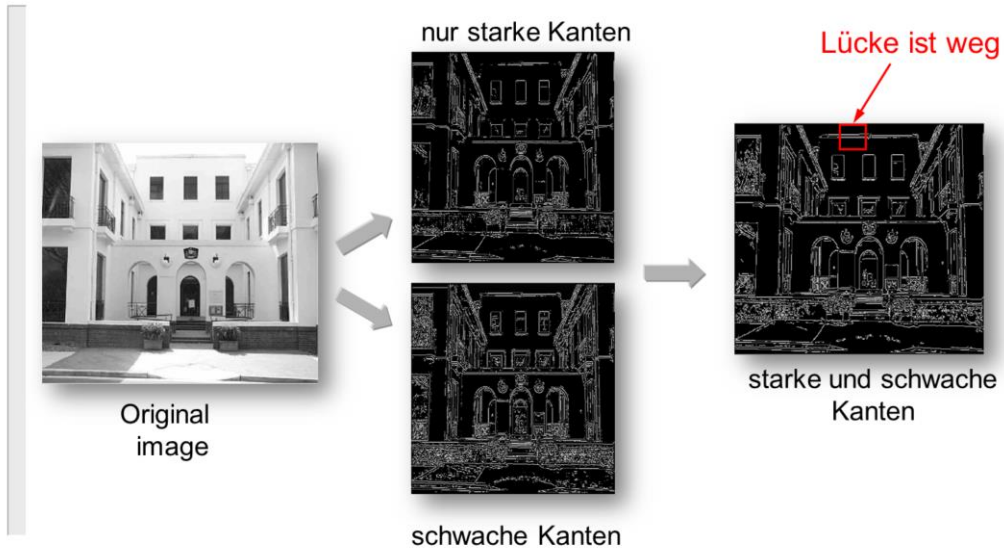
Betrag des Gradienten



Nicht-Maxima-Unterdrückung



Beispiel: Canny Hysterese



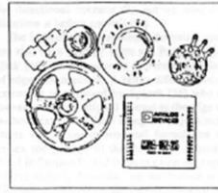
Nach Nicht-Maximum-Unterdrückung hat noch jeder Pixel, der in irgendeinem Gradienten ein Maximum war, einen Grauwert für seine Kantenwahrscheinlichkeit. Die Entscheidung „Kante oder nicht Kante“ fällt dann aufgrund eines festgelegten Schwellenwerts für jeden dieser Pixel.

Dabei können gemäß der Hysterese-Regel zwei unterschiedliche Schwellenwerte angewandt und kombiniert werden.

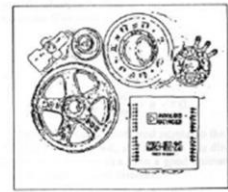
Beispiel: Canny Hysterese



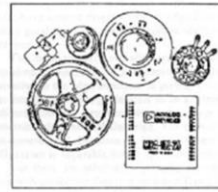
(a)



(b)



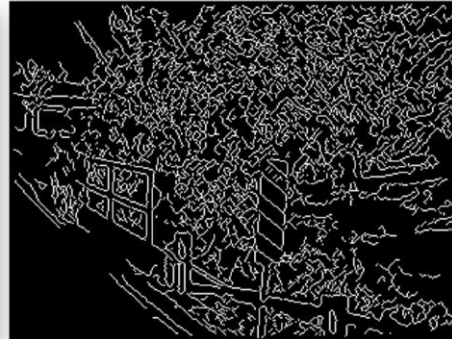
(c)



(d)

- (a) original image
- (b) threshold at T_1
- (c) thresholded at $2T_1$
- (d) image thresholded with hysteresis using both (b) and (c).

Beispiel: Canny Kantenerkennung



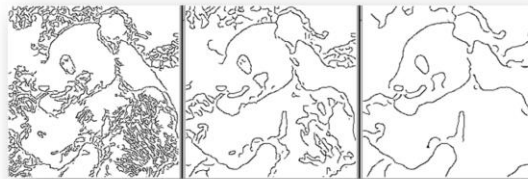
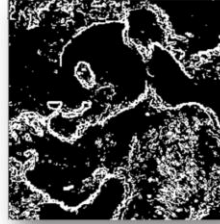
note painted lines on road preserved, whereas others didn't

Beispiel : Sobel vs. Canny



Sobel

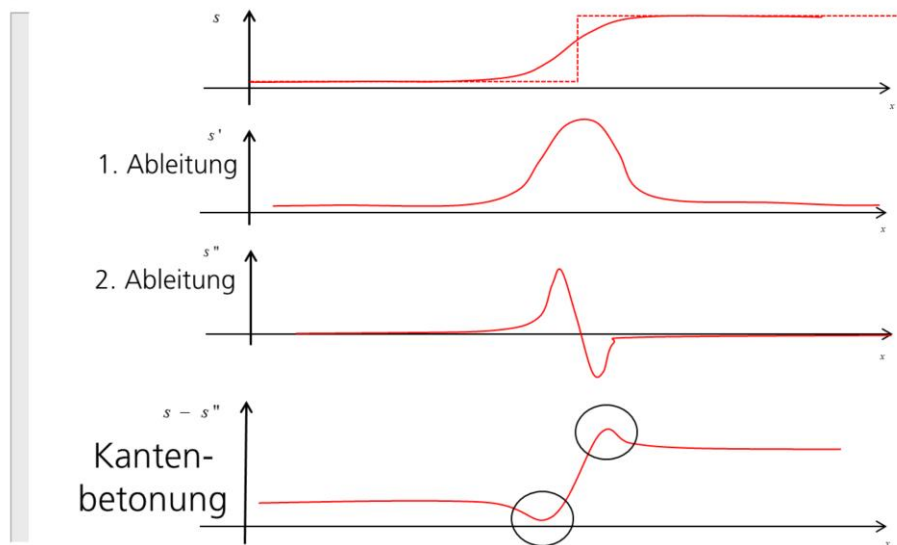
Canny



Parameter: $\sigma = 1, 2, 3$ und $T_1 = 0.3, T_2 = 0.7$

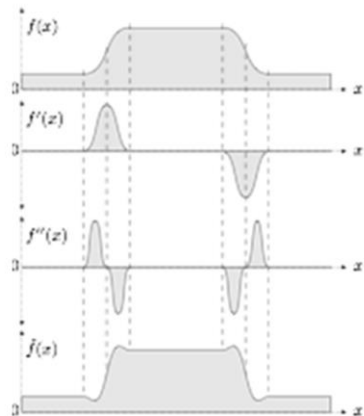
Was ist hier sigma? – Parameter beim Gauß-Filter als erstem Canny-Schritt (?)

Kantenbetonung mittels 2. Ableitung



Kanten schärfen Prinzip

- Ziel: Anheben der hochfrequenten Bildanteile
- Differenzbildung mit der zweiten Ableitung

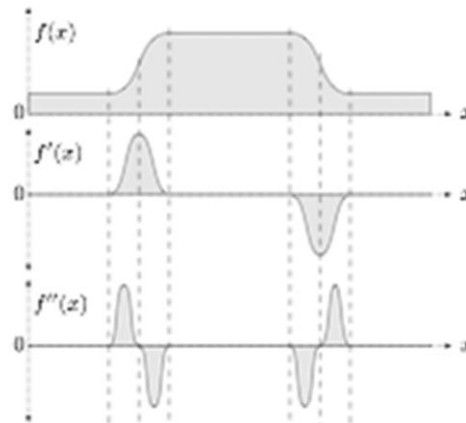


$$\hat{f}(x) = f(x) - w \cdot f''(x)$$

w : Skalierungsfaktor

Laplace-Operator Prinzip

- 2. Ableitung \rightarrow lokale Krümmung
- Maxima/Minima von $f''(x) \rightarrow$ Wendepunkte von $f(x)$



Während Differenz-Operatoren als Kantendetektionsfilter mathematisch durch die Berechnung der ersten Ableitung der Bildfunktion (also Steigung des Intensitätsgradienten) entstehen, verstärken Filter (wie z.B. der Laplace-Filter) auf der Grundlage der zweiten Ableitung Kanten durch Kontrastverstärkung auf beiden Seiten dieser Kanten.

Laplace-Operator

Herleitung

$$\nabla^2 f(u, v) = \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2}$$

von $f(u, v)$ nach $I(u, v)$

$$\frac{\partial^2 I(u, v)}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} (I(u+1, v) - I(u, v))$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} I(u+1, v) - \frac{\partial}{\partial u} I(u, v)$$

$$= I(u+1, v) - I(u, v) - I(u, v) + I(u-1, v)$$

$$\frac{\partial^2 I(u, v)}{\partial u^2} = I(u+1, v) - 2I(u, v) + I(u-1, v)$$

analog in v-Richtung

Laplace-Operator

$$\nabla^2 I(u, v) = I(u+1, v) + I(u-1, v) - 4I(u, v) + I(u, v+1) + I(u, v-1)$$

Filtermatrix:

$$h_{lp}(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Drehung um 45° :

$$h_{lp_{45}}(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Sobel vs Laplace Mathematik

$$\frac{\partial S_e}{\partial x} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial S_e}{\partial y} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sobel Operator
(Faltungskern) für
die 1. Ableitung

Betrag

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Richtung des Gradienten

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Laplace Operator:
Faltungskern für die 2.
Ableitung

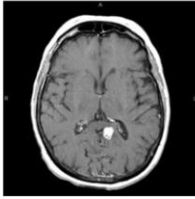
Summe der Elemente ist NULL !

Laplace ist richtungsunabhängig (da punktsymmetrisch) und sucht nach der zweiten Ableitung und liefert den Betrag gleich in einem Schritt.

Leider ist dieser noch sensitiver gegenüber Rauschen.

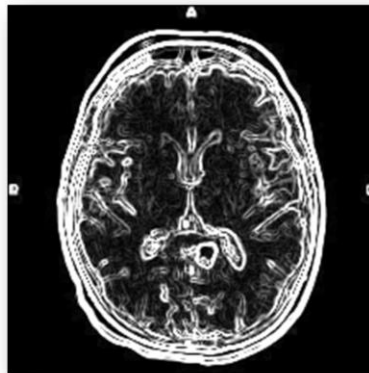
Sobel vs. Laplace

Kantenschärfe

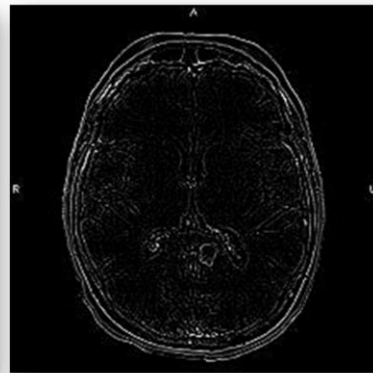


Original

Sobel

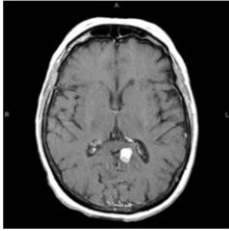


Laplace

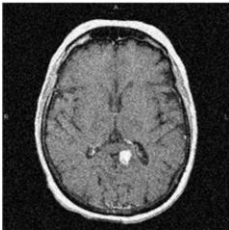


Sobel vs. Laplace

Rauschempfindlichkeit

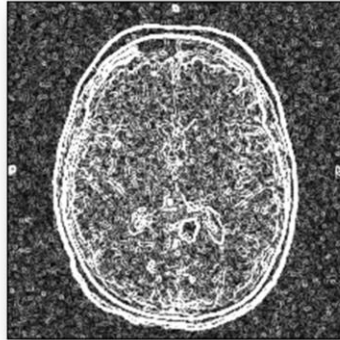


Original

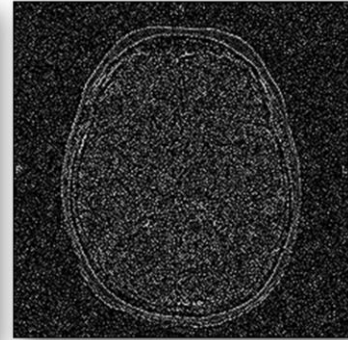


Original, verrauscht

Sobel



Laplace



Kompetenzcheck

- **Kanten in Bildern**
 - Kanten und Morphologische Operatoren
 - Kanten allgemein
- **Hochpass- und Tiefpass-Filter**
 - Bildfrequenzen
 - Mathematisch: 1./2. Ableitung
- **Kantenfilter**
 - Differenzoperator
 - Roberts-Operator
 - Prewitt-Operator
 - Sobel-Operator
 - Canny-Kantendetektor
 - Laplace-Operator (Schärfung)

